

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара  
Міністерства освіти і науки України

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара  
Міністерства освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

**Олевський Олександр Вікторович**

УДК 519.6, 621.3

## **ДИСЕРТАЦІЯ**

### **Розвиток методів цифрового спектрального аналізу для задач багаточастотних вимірювань у мікрохвильовому діапазоні**

113 – Прикладна математика

11 – Математика та статистика

Подається на здобуття ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

\_\_\_\_\_ О. В. Олевський

Науковий керівник **Дробахін Олег Олегович**, доктор фізико-математичних наук, професор

Дніпро - 2026

## АНОТАЦІЯ

*Олевський О. В.* Розвиток методів цифрового спектрального аналізу для задач багаточастотних вимірювань у мікрохвильовому діапазоні – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 – Прикладна математика. – Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара Міністерства освіти і науки України, Дніпро, 2026.

Мікрохвильові вимірювання знаходять широке застосування для розв’язання завдань неруйнівного контролю виробів ракетно-космічної техніки з полімерних композиційних матеріалів, підповерхневого зондування, оцінки параметрів вібрацій та їхніх мод, що з математичної точки зору відноситься до класу обернених задач. Одним з потужних методів є метод розрахунку часових сигналів з даних багаточастотних вимірювань коефіцієнту відбиття для отримання радіозображень вздовж осі зондування в поєднанні зі скануванням для отримання залежності від поперечних координат. Сканування формує віртуальну антенну решітку, якість роботи якої залежить від відповідного амплітудно-фазового розподілу електромагнітного поля, що і формує діаграму спрямованості. В класичному варіанті для отримання відповідних даних використовуються методи голографічної інтерферометрії і дискретне перетворення Фур’є, що обмежує роздільну здатність. Шляхом підвищення роздільної здатності є застосування методів параметричного спектрального аналізу, які дозволяють визначити показники експоненціальних залежностей та їхні амплітуди.

Теоретичним підґрунтям застосування параметричних методів спектрального аналізу є те, що функції у вигляді суми експоненціальних залежностей є власними функціями лінійних інваріантних до зсуву динамічних систем, які описуються диференціальним рівнянням другого порядку, що впливає з рівнянь Максвелла. Для класу задач, що розглядаються, експоненціальне подання є правильним не тільки для часової, але і частотної

області. Саме це дозволяє застосовувати узагальнений метод власних коливань, де власними параметрами є час поширення електромагнітного сигналу до характерного відбивача досліджуваної структури.

Дисертаційна робота присвячена вивченню та покращенню методів параметричного спектрального аналізу, зокрема – методу Проні та методу пучка матриць (МПМ), для задач, що з'являються в ході радіофізичних експериментів. Проблемою застосування означених методів є наявність у вимірних даних шуму. Випадок наявності імпульсного спотворення даних не знайшов відповідного дослідження в попередніх роботах, що ставить завдання створення ефективних стабільно працюючих методів і алгоритмів. Перевага даних методів полягає у відсутності прив'язки оцінок ефективних частот сигналу до сітки як для стандартних методів на основі дискретного перетворення Фур'є. Водночас дані методи дозволяють розв'язувати задачу в перевизначеному вигляді з метою покращення надійності їх роботи в умовах білого шуму. В роботі розглядаються межі застосовності та ефективності авторських підходів до реалізації методів параметричного спектрального аналізу в умовах імпульсного шуму та неточної оцінки частотних складових, і також подається подальший розвиток відомого методу сегментування сигналу із застосуванням до методу пучка матриць. Окремо розглядається можливість аналізу сигналів, отриманих за допомогою комп'ютерної симуляції роботи реального вимірювального комплексу.

Початкові випробування для перевірки ефективності роботи були проведені на основі комп'ютерної моделі вимірювальної установки, що складалась із хвилеводного фідера, рупорної антени та пари ідеально провідних пластин в якості відбивача. Моделювання проводилось на основі методу допоміжних джерел, що дозволяє ефективно проводити розрахунки в галузі електромагнетизму у випадках коли стандартні методи скінчених елементів та дискретного простору і часу вимагають зовеликої кількості комп'ютерної пам'яті та часу розрахунку. При цьому було продемонстровано можливість оцінки поздовжнього зсуву між відбивачами із більшою точністю ніж за допомогою стандартного підходу.

В ході дисертаційного дослідження отримав подальшого розвитку вже існуючий метод сегментування сигналу для методу Проні. Автором даний метод було застосовано для покращення оцінок за допомогою МПМ. При цьому сигнал розбивався на певну кількість сегментів із можливістю перекривання, і для кожного з них розв'язувалась задача спектрального аналізу сигналу. Після цього результати обробки формувались шляхом зваженого усереднення значень частот, амплітуд та коефіцієнтів лінійного передбачення. При цьому в якості ваги було застосовано модифіковане значення відношення потужності сигналу до потужності шуму, а параметри МПМ та сегментування були обрані за допомогою алгоритму детермінованого локального пошуку на основі багаторазового експерименту.

Для боротьби із імпульсним шумом вперше було запропоновано та розроблено алгоритм пропускання точок сигналу. При цьому матриця сигналу системи лінійних алгебраїчних рівнянь моделі лінійного передбачення була модифікована шляхом виключення із неї рядків, що містять шумливі точки. Було продемонстровано та математично обґрунтовано, що подібна зміна її форми не впливає на працездатність методу Проні та МПМ у випадку, коли кількість відкинутих точок є обмеженою. Для нижньої межі значення даного обмеження було виведено формули, значення яких для типових випадків параметричного спектрального аналізу є прийнятним в аспекті сучасної науки та техніки. З метою автоматизування пошуку імпульсних викидів було застосовано метод багаторазового розрахунку. При цьому на основі узгодженої фільтрації та розрахунку скінчених різниць кожній з точок сигналу надавався індекс наявності імпульсу. Після цього від сигналу відкидалося 0, 1, 2 і т.д. точок із найбільшою оцінкою наявності імпульсу. Кожного разу проводився аналіз отриманого сигналу та його порівняння з вихідним на основі принципу мінімуму протяжності з метою ігнорування при цьому викидів. Дана процедура продовжується поки не буде досягнуто локального мінімуму або максимального числа точок, які можна відкинути.

При проведенні комп'ютерного експерименту для перевірки якості оцінки параметрів моделі за допомогою підходу пропускання точок для методу Проні було продемонстровано його стійкість до імпульсного шуму в модельних сигналах. На основі точної математичної моделі коефіцієнту відбиття від товстого діелектричного шару було показано, що в умовах наявності суміші білого та імпульсного шуму метод пропускання точок дозволяє отримати кращі оцінки електричної товщини шару. Для підходу пропускання точок в МПМ було показано, що якість оцінок для модельного сигналу із сумішшю білого та імпульсного шуму також значно покращується як для моно- так і для багаточастотного сигналу. Окремо для МПМ було показано, що застосування підходу пропускання точок може надати результати такого ж порядку якості, що і стандартний метод із використанням на порядок меншого параметру моделі, що значно підвищує швидкість розрахунку і дозволяє застосовувати метод багаторазової оцінки сигналу для пошуку імпульсних викидів без втрати швидкодії.

Іншим аспектом роботи з обраними методами параметричного спектрального аналізу є те, що значення комплексних частот та комплексних амплітуд розраховуються окремо. При цьому точна оцінка частотних коефіцієнтів на фоні шуму в сигналі або неточна їх оцінка для малOSHумливого сигналу можуть призвести до ефекту «дотягування» відповідності форми апроксиманти сигналу до вихідного за рахунок відхилення оцінок амплітудних параметрів. В дисертаційній роботі було вперше запропоновано, математично обґрунтовано та реалізовано метод коригування частот, що дозволяє впливати на їх оцінки під час розрахунку амплітудних коефіцієнтів. При цьому вважалось, що необхідні відхилення частот є відносно малими і, відповідно, було застосовано модель сигналу, в якій дані відхилення враховувались за допомогою лінійного приросту. Даний підхід дозволяє зберігати лінійність задачі, що дозволяє розв'язувати її ефективним стандартними методами комп'ютерної лінійної алгебри.

В ході дисертаційного дослідження автором було продемонстровано, що даний підхід дозволяє значно покращити якість обробки комплексно-експоненціальних сигналів. При цьому було показано можливість покращення оцінок, отриманих за допомогою модифікованого методу Проні, до рівня стандартного методу пучка матриць. Окрім цього на математичній моделі хвилеводу із похибкою кроку встановлення зондів (що також еквівалентно похибці налаштування частоти) було продемонстровано, що метод коригування частот у зв'язці із стандартним методом, заснованим на комплексно-експоненціальній моделі з відомим частотним параметром, здатен покращити якість оцінки комплексного коефіцієнта відбиття за значно менший час, ніж метод Проні. При проведенні випробувань для пошуку діапазонів застосовності кожного із випробуваних методів було показано, що саме метод коригування частот (в даному випадку – нормованого коефіцієнта поширення) є найбільш доцільним для сучасних можливостей лабораторної апаратури.

Методи параметричного спектрального аналізу також було випробувано для задачі оцінки фази комплексного коефіцієнта відбиття з урахуванням особливостей вимірювання значення потужності хвилі за допомогою діодного детектора та АЦП на базі розповсюдженого мікроконтролера. Для цього було побудовано симуляційний комплекс на базі ПЗ NGSpice. При цьому було показано, що застосування препроцесингу перед обробкою за допомогою методу Проні може давати оцінки, що є кращими за якістю, ніж ті, що отримуються за допомогою стандартного методу дискретного перетворення Фур'є для багаточастотного сигналу та для багатозондового сигналу при умові помірних значень магнітуди комплексного коефіцієнта відбиття, що відповідає також випадку аналізу сигналу в антенній решітці.

У *вступі* обґрунтовано актуальність тематики дисертаційного дослідження, окреслено предмет та об'єкт дослідження, зазначено зв'язок роботи із науковими програмами та темами, висвітлена новизна та практичне значення дослідження, його мета та особистий внесок здобувача разом з інформацією про апробацію отриманих результатів.

*Перший розділ* «Аналіз математичних залежностей для опису досліджуваних об'єктів, області їхньої застосовності, існуючих алгоритмів реалізації методів цифрового параметричного спектрального аналізу. Вибір напряму дослідження» присвячено огляду поточних досягнень в сфері параметричного спектрального аналізу та вибору із можливих підходів тих, які доцільно використовувати в задачах радіодальнометрії: методу Проні та МПМ. При цьому також висвітлюються методи, що застосовуються в справжніх експериментальних установках та обґрунтовується вибір комплексно-експоненціальної моделі сигналу. Окрім цього, в розділі розглядаються типи шумів, які є найбільш поширеними в радіофізичних вимірюваннях та показано, що боротьба із імпульсним шумом є актуальною задачею. В розділі також розглядаються та обґрунтовуються вибори інструментів для симуляції необхідних при проведенні дослідження.

*Другий розділ* «Розвиток існуючих методів та алгоритмів» присвячено застосуванню та розвитку існуючих підходів та алгоритмів для задач поточного дослідження. Зокрема розв'язується задача генерації імпульсного шуму, сортування оцінок, що надаються методами параметричного спектрального аналізу та надається подальший розвиток методу сегментування сигналу. Також розглядається питання вибору доцільної реалізації методу Проні та мінімальної кількості відліків в тестових послідовностях.

*Третій розділ* «Запропоновані новітні методи та алгоритми» присвячено розвитку новітніх авторських методів пропускання точок та корекції частот для покращення якості обробки сигналів методом Проні та МПМ в умовах імпульсного шуму та в умовах, коли початкові оцінки комплексної частоти потребують коригування при оцінці амплітудних коефіцієнтів.

*Четвертий розділ* «Випробування запропонованих методів та алгоритмів» присвячено проведенню комп'ютерного експерименту для оцінки працездатності та меж застосовності методу сегментування сигналу, методу пропускання точок для методу Проні та МПМ і методу корекції частот як для моно- так і для багаточастотних сигналів. Окрім цього, продемонстровано

можливість аналізу сигналу діодного детектора та АЦП за допомогою методу Проні на основі симульованої рефлектометричної вимірювальної системи.

У *висновках* підсумовуються результати дисертаційної роботи, демонструється виконання поставлених задач та огляд розроблених вперше та отримавших подальший розвиток методів.

**Ключові слова:** параметричний спектральний аналіз, метод Проні, метод пучка матриць, голографія, інтерферометрія, зворотна задача, комп'ютерне моделювання, неруйнівний контроль, мікрохвильове випромінення, система однорідних автономних рівнянь, вібрації, лінійні антенні решітки, узагальнений метод власних коливань, матриці.



## SUMMARY

*Olevskiy O. V.* Development of the Digital Spectral Analysis Techniques for Multifrequency Microwave Measuring Data Processing – Manuscript.

Thesis for the Doctor degree of Physical and Mathematical Sciences in Speciality 113 – Applied mathematics. – Oles Honchar Dnipro National University of Ministry of Education and Science of Ukraine, Dnipro, 2026.

Microwave measurements are widely used to solve problems of non-destructive testing within the field of rocket building when the vehicle is made of polymer composite materials, along with such problems as subsurface sounding, and estimation of vibration parameters and their modes, which from a mathematical point of view belongs to the inverse problem field. Time-domain signal computation based on the frequency-domain data obtained during longitudinal multifrequency scanning in conjunction with transverse spatial scanning is considered an effective method. Scanning forms a virtual antenna array, the quality of which depends on the corresponding amplitude-phase distribution of the electromagnetic field, which forms the radiation pattern. In the standard version, methods of holographic interferometry and discrete Fourier transform are used to obtain the corresponding data, which limits the resolution. One way to increase the resolution is to use methods of parametric spectral analysis, which allow for estimation of the exponents of exponential components and their amplitudes.

The theoretical basis which allows for the application of parametric methods of spectral analysis is the fact that sums of exponential functions are the eigenfunctions of linear shift-invariant dynamic systems, which are described by a second-order differential equation arising from Maxwell's equations. For the class of problems under consideration, the exponential representation is correct not only for the time domain, but also for the frequency domain. This fact allows for the application of the generalized method of eigenoscillations, where time-of-flight of the electromagnetic signal to the characteristic reflector of the structure under study are the eigenparameters.

The thesis is devoted to the study and improvement of parametric spectral analysis methods, in particular the Prony's method and the matrix pencil method (MPM), for problems that arise during radiophysics experiments. The presence of white noise in the data poses a problem when using the abovementioned methods. The case of the presence of impulse distortion in the data had not found a corresponding study in previous works, which requires research into stable and effective methods and algorithms. The main advantage of these methods is the absence of a frequency grid that is present in the discrete Fourier transform. At the same time, these methods allow for solving the problem in an overdefined form in order to improve the reliability of their operation in white noise conditions. The thesis considers the applicability limits and effectiveness of the novel approaches to the implementation of parametric spectral analysis methods under impulse noise conditions and for a case of inaccurate estimation of frequency components. A further development of the well-known signal segmentation method with application to the matrix pencil method is also considered. The possibility of analyzing signals obtained using a computer simulation of a real-life measuring setup was also researched.

Initial testing intended to verify the efficiency of the parametric spectral analysis methods was carried out for a computer model of a measuring setup, which consisted of a waveguide feeder, a horn antenna, and a pair of perfectly conducting plates serving as a reflector. The modeling was carried out with the help of the auxiliary source method, which allows for effective calculations in the field of electromagnetics in cases where standard finite element and discrete space and time methods require too much computer memory and calculation time. It has been demonstrated that it is possible to estimate the longitudinal displacement between reflectors with greater accuracy than using the standard approach.

During the research, the well-known Prony's method-based signal segmentation method was further developed into the form suitable for the improvement of the MPM-based estimates. The signal was divided into a number of segments with the possibility of overlapping, and for each of them the spectral analysis problem was solved. After that, the processing results were formed by weighted averaging of the values of the

frequencies, amplitudes and linear prediction coefficients. During the research, the modified value of the signal power to noise power ratio was used as a weight, and the MPM and segmentation parameters were selected using the deterministic local search algorithm with multiple experiment approach.

A novel point skipping algorithm has been proposed and developed to combat impulse noise. In this case, the signal matrix of the system of linear algebraic equations of the linear prediction model was modified by excluding rows containing noisy points from it. It has been demonstrated and mathematically substantiated that such a change does not affect the performance of the Prony's method and the MPM when the number of discarded points is limited. Formulas have been derived for the lower limit of the value of this restriction. The values found for typical cases of parametric spectral analysis application are in line with the capabilities of modern experimental setups. In order to automate the search for impulse occurrences, a method of sequential calculation was applied. Each of the signal points was given an impulse presence estimator based on matched filtering and finite difference applications. After that, 0, 1, 2, etc. points with the highest impulse presence estimates were discarded from the signal. Each time, the obtained signal was analyzed and compared with the original based on the principle of minimum duration in order to ignore the emissions. This procedure continued until a local minimum or the maximum number of points that can be discarded was reached.

Computer experiment has demonstrated the ability of the Prony-based point skipping approach to resist the effects of impulse noise. It was shown that in the presence of a mixture of white and impulse noise, the point skipping method yields better estimates of the electrical thickness of an accurate mathematical model of a dielectric slab. For the MPM-based point skipping approach it has been shown that the quality of estimates for a model signal with a mixture of white and impulse noise was also significantly improved for both mono- and multi-frequency signals. It has also been demonstrated that in the case of the MPM-based approach the use of the point skipping algorithm can yield results of the same order of quality as the standard method using while the model parameters of the former are an order of magnitude smaller than

for the latter. This significantly increases the calculation speed and allows for the application of the method of sequential signal estimation to the problem of impulse identification without the loss of estimation speed. Another aspect of the selected methods of parametric spectral analysis is the fact that the values of complex frequencies and complex amplitudes are calculated separately. In this case, an accurate estimate of the frequency coefficients in the presence of noise in the signal or an inaccurate estimate for a low-noise signal can lead to the method trying to fit the shape of the approximant to the input signal shape by distorting the amplitude coefficient values. In the current thesis, a novel frequency correction method has been proposed, mathematically substantiated and implemented. The method allows for the correction of the frequency estimates during the calculation of the amplitude coefficients. It was assumed that the required frequency deviations are relatively small and, accordingly, a signal model was applied in which these deviations were taken into account using a linear increment. This approach allows maintaining the linearity of the problem, which allows it to be solved effectively by standard methods of computer linear algebra.

During research, the author has demonstrated that this approach allows for a significant improvement in the quality of complex-exponential signal processing. Notably, it has been demonstrated that a modified Prony's method is capable of yielding results close in quality to those calculated with the help of the standard MPM. Additionally it has been demonstrated with the help of a mathematical model of a waveguide with an error in the probe installation step (which is also equivalent to the frequency tuning error) that the frequency correction method in conjunction with the standard method based on a complex-exponential model with a known frequency parameter is able to improve the quality of the complex reflection coefficient estimation while being significantly faster than the Prony's method. It has been demonstrated during testing that the applicability range of the frequency (or in this case normalized propagation constant) correction method is in line with the capability of modern laboratory setups. Methods of parametric spectral analysis were also tested for the task of the complex reflection coefficient phase estimation, with the peculiarities of measuring the electromagnetic wave power using a diode detector and an ADC

based on a common microcontroller taken into account. For this purpose, a simulation complex was built based on the NGSpice software. It was shown that the use of preprocessing before using the Prony method can provide estimates that are better in quality than those obtained using the standard discrete Fourier transform method for a multi-frequency signal and for a multi-probe signal under the condition of moderate values of the magnitude of the complex reflection coefficient, which also corresponds to the case of signal analysis in an antenna array.

*The introduction* substantiates the relevance of the topic of the dissertation, outlines the subject and object of the research, indicates the connection of the work with scientific programs and topics, highlights the novelty and practical significance of the research, its goal and personal contribution of the applicant along with the result proofing.

*The first section* "Analysis of mathematical dependencies for the description of the objects under study, their areas of applicability, existing algorithms for implementing digital parametric spectral analysis methods. Choosing a research direction" is devoted to a review of current achievements in the field of parametric spectral analysis and the choice of possible approaches that are appropriate to use in radio ranging problems: the Prony method and the MPM. At the same time, the methods used in real experimental installations are also highlighted and the choice of the complex-exponential signal model is justified. In addition, the section considers the types of noise that are most common in radiophysics measurements and demonstrates that combating impulse noise is a relevant task. The section also considers and justifies the choices of simulation tools necessary for conducting the study.

*The second section*, "Development of Existing Methods and Algorithms," is devoted to the application and development of existing approaches and algorithms for the tasks of the current study. In particular, the problem of generating impulse noise, sorting estimates provided by parametric spectral analysis methods, and further development of the signal segmentation method are solved. The issue of choosing an appropriate implementation of the Prony method and the minimum number of samples in test sequences is also considered.

*The third section* "Proposed new methods and algorithms" is devoted to the development of the novel methods of point skipping and frequency correction to improve the quality of signal processing by the Prony and the MPM in conditions of impulse noise and in conditions when the initial estimates of the complex frequency require correction when estimating the amplitude coefficients.

*The fourth section* "Testing the proposed methods and algorithms" is devoted to conducting a computer experiment in order to assess the performance and applicability of the signal segmentation method, the point skipping method for the Prony and the MPM, and the frequency correction method for both mono- and multi-frequency signals. In addition, the possibility of analyzing the signal of a diode detector and ADC using the Prony method based on a simulated reflectometric measuring system is demonstrated.

*The conclusions* summarize the results of the dissertation, demonstrate the implementation of the tasks set, and review the methods developed for the first time and further developed.

**Keywords:** parametric spectral analysis, Prony's method, matrix pencil method, holography, interferometry, inverse problem, computer modeling, nondestructive testing, microwave radiation, system of homogeneous autonomous equations, vibrations, linear antenna array, generalized eigenoscillation approach, matrices.

## СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

Статті в фахових виданнях категорії Б:

- О. О. Дробахін і О. В. Олевський, “Підвищення стійкості оцінки параметрів методом Проні при наявності імпульсної завади,” *Питання прикладної математики і математичного моделювання*, вип. 23, с. 53–63, 2023, doi: 10.15421/322306.
- О. О. Drobakhin and O. V. Olevskyi, “Improvement of the accuracy of the reflector distance estimation in the fresnel zone in the method of the time-domain signal synthesis based on the parametric spectral analysis,” *Питання прикладної математики і математичного моделювання*, vol. 24, pp. 18–29, 2024, doi: 10.15421/322403.
- О. О. Дробахін і О. В. Олевський, “Методи компенсації спотворень оцінок фази у багатозондових мікрохвильових вимірювачах,” *Технічна механіка*, вип. 2, с. 72–86, 2025, doi: 10.15407/itm2025.02.072.
- О. О. Drobakhin and O. V. Olevskyi, “Algorithm for the improvement of the matrix pencil method reliability under the influence of the impulse interference,” *Problems of applied mathematics and mathematical modeling*, vol. 25, pp. 18–29, 2025, doi: 10.15421/322502.

Статті у виданнях категорії А (Scopus):

- О. О. Drobakhin and O. V. Olevskyi, “Frequency adjustment method for the improvement of amplitude estimation in the parametric spectral analysis,” *Mathematical Modeling and Computing*, vol. 12, no. 2, pp. 581–587, 2025, doi: 10.23939/mmc2025.02.581.

Тези конференцій:

- О. О. Drobakhin and O. V. Olevskyi, “Approaches for improvement of reliability of the Prony’s method computation,” *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 2675, no. 1, p. 012028, 2023, doi: 10.1088/1742-6596/2675/1/012028.

- O. Drobakhin and O. Olevskyi, “Problems and Solutions Associated with Prony’s Method for Processing Data with Pulse Noise,” in *2023 IEEE XXVIII International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED)*, IEEE Xplore, 2023, pp. 119–123, doi: 10.1109/DIPED59408.2023.10269456.
- О. О. Дробахін і О. В. Олевський, “Покращення якості відтворення параметрів сигналу методом Проні в присутності імпульсного шуму,” in *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (МПЗІС-2023)*, О. М. Кісельова, Ред., Дніпро: ДНУ, 2023, с. 118–119.
- O. Drobakhin and O. Olevskyi, “Application of the Matrix Pencil Method for Spectral Analysis in Presence of Impulse Noise in Electric Signals”, in *2024 IEEE 7th International Conference on Smart Technologies in Power Engineering and Electronics (STEE)*, IEEE Xplore, 2024, pp. TT1.04.1–T1.04.5, doi: 10.1109/STEE63556.2024.10748007.
- О. О. Дробахін і О. В. Олевський, “Корекція оцінок частот як засіб покращення якості обробки сигналів методами параметричного спектрального аналізу,” *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (МПЗІС-2024) : Тези доповідей XXII Міжнародної науково-практичної конференції*, Дніпро, Україна, 20–22 листоп. 2024 / ред. О. М. Кісельова, Ред. Дніпро, Україна, 2024. с. 121–122.
- O. Drobakhin, O. Olevskyi and V. Chuchva “Mathematical Methods for Improving Broadband Multi-Probe Measurements of Complex Reflectivity,” in *2025 IEEE 30th International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED)*, Tbilisi, Georgia, 2025, pp. 78-83, doi: 10.1109/DIPED66951.2025.11194508.
- О. О. Дробахін і О. В. Олевський “Покращення оцінок параметрів сигналу за допомогою методу пучка матриць завдяки пропусканню зашумлених



точок,” в *МПЗІС-2025*, О. М. Кісельова, Ред. Дніпро, Україна, 2025, с. 141–142.

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	21
Розділ 1 АНАЛІЗ МАТЕМАТИЧНИХ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ ДЛЯ ОПИСУ ДОСЛІДЖУВАНИХ ОБ'ЄКТІВ, ОБЛАСТІ ЇХНЬОЇ ЗАСТОСОВНОСТІ, ІСНУЮЧИХ АЛГОРИТМІВ РЕАЛІЗАЦІЇ МЕТОДІВ ЦИФРОВОГО ПАРАМЕТРИЧНОГО СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛІЗУ. ВИБІР НАПРЯМУ ДОСЛІДЖЕННЯ .....	29
1.1 Комплексно-експоненціальні залежності та області їхньої застосовності	29
1.2 Математична модель одношарової структури .....	30
1.3 Голографічні та інтерференційні методи вимірювання .....	34
1.4 Властивості шуму в експериментальних даних .....	44
1.5 Симуляція електромагнітних хвиль .....	49
1.6 Методи аналізу комплексно-експоненціальних сигналів .....	51
1.7 Параметричний спектральний аналіз за допомогою ДПФ .....	54
1.8 Метод MUSIC .....	57
1.9 Метод Проні.....	60
1.10 Методи визначення кількості компонент для моделі суми експонент....	63
1.11 Класичні методи розв'язку систем методу Проні.....	65
1.11.1 Метод найменших квадратів.....	65
1.11.2 Метод власного вектора .....	67
1.12 Метод пучка матриць.....	69
1.13 Проблема сигналів з пропущеними даними.....	71
1.14 Висновки .....	72
Розділ 2 РОЗВИТОК ІСНУЮЧИХ МЕТОДІВ ТА АЛГОРИТМІВ .....	74
2.1 Апаратне та програмне забезпечення .....	74

	19
2.2 Алгоритм МПМ .....	75
2.3 Алгоритм методу допоміжних джерел .....	76
2.4 Генерація імпульсного шуму .....	78
2.5 Сортювання результуючих оцінок параметрів .....	79
2.6 Сегментний підхід до аналізу сигналу .....	80
2.7 Препроцесинг сигналу, отриманого з АЦП .....	82
2.8 Моделювання діодного детектора та відповідного АЦП .....	84
2.9 Вибір типу методу Проні .....	85
2.10 Підбір мінімальної кількості відліків сигналу для проявлення характеристик білого шуму .....	88
2.11 Висновки .....	90
Розділ 3 ЗАПРОПОНОВАНІ НОВІТНІ МЕТОДИ ТА АЛГОРИТМИ .....	91
3.1 Метод пропускання точок .....	91
3.1.1 Метод Проні .....	91
3.1.2 МПМ .....	92
3.1.3 Ідентифікація викидів .....	94
3.2 Метод коригування частоти .....	96
3.2.1 Звичайний сигнал .....	96
3.2.2 Сигнал, що пройшов крізь різницевий фільтр .....	98
3.3 Висновки .....	100
Розділ 4 ВИПРОБУВАННЯ ЗАПРОПОНОВАНИХ МЕТОДІВ ТА АЛГОРИТМІВ .....	102
4.1 Застосування параметричного спектрального аналізу для радарної дальнометрії .....	102
4.2 Застосування методу сегментування сигналу до методу пучка матриць .....	106

4.3 Застосування методу відкидання точок для аналізу сигналу методом Проні .....	111
4.4 Застосування методу відкидання точок для аналізу сигналу за допомогою МПМ .....	118
4.5 Пряме застосування методу коригування частот .....	128
4.6 Застосування методу коригування частот до вимірювання відстаней у мікрохвильовому діапазоні .....	133
4.7 Застосування методів параметричного спектрального аналізу для обробки сигналу реального фронтенду .....	143
4.8 Висновки .....	146
ВИСНОВКИ .....	148
СПИСОК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ .....	151
Додаток А .....	171
Додаток Б .....	174
Додаток В .....	190
Додаток Г .....	192
Додаток Д .....	194
Додаток Е .....	204
Додаток Ж .....	210
Додаток И .....	217

## ВСТУП

**Актуальність теми.** Методи параметричного спектрального аналізу на даний час є невід'ємною частиною комп'ютерної обробки сигналів та застосовуються у різноманітних галузях, що включають в себе електроніку та електротехніку [1]–[3], зокрема, діагностування електродвигунів [4], радіофізику [5], [6], радіолокацію для задачі пошуку напрямку приходу сигналу (DoA estimation) [7], [8] та отримання поздовжніх зображень методами Фур'є-голографії [9], [10], що є варіантом задачі дальнометрії, обробку медичних сигналів [11] та аналіз механічних вібрацій [12]. Інтерферометричні багатозондові мікрохвильові методи знайшли застосування для вимірювання вібрацій і вимірювання комплексного коефіцієнту відбиття [11], [13]–[15]. Голографічні інтерферометричні методи дослідження багатошарових структур є перспективним засобом в галузі неруйнівного контролю [16]. Подальший розвиток таких підходів може бути забезпечений шляхом застосування методів параметричного спектрального аналізу. Методи оцінки спектральних параметрів відновлюють коефіцієнти характеристичного поліному системи за експериментальними даними або даними чисельної симуляції, що дозволяє, в свою чергу, відновити диференціальне рівняння, яке описує систему, та отримати власні частоти. В певних ситуаціях такий підхід за умови сегментації даних відкриває можливості провести кускову лінеаризацію нелінійних диференціальних рівнянь і дослідити трансформацію частот коливань.

Більшість популярних методів параметричного спектрального аналізу, таких як метод Проні [3], метод пучка матриць (МПМ) [6], MUSIC та ESPRIT [8] мають математичний алгоритм, який забезпечує оцінку спектральних параметрів в умовах наявності адитивного білого шуму. Математичний апарат оцінювання спектральних параметрів за експериментальними даними дозволяє оцінити значення узагальнених власних параметрів [17]: власних частот, власних часів при розв'язанні задачі дальнометрії, власних просторових частот для задачі пошуку напрямку приходу сигналу. Головною проблемою при застосуванні

таких методів у реальних ситуаціях є наявність інших типів шуму. Зокрема, в електровимірювальних системах достатньо часто зустрічається так званий імпульсний шум, який може бути викликаний процесами всередині напівпровідникових приладів та різкими змінами навантаження або постачання в електричній мережі, певними збоями та некоректною роботою аналогово-цифрових перетворювачів (АЦП). Окрім цього, проблемою, аналогічною до наявності імпульсного шуму в сигналі, є ситуація виходу з ладу елементів антенних або акустичних решіток, що використовуються для кутової локації. Шум подібного типу відрізняється відносною рідкістю проявлення, і тому його стохастичні характеристики зазвичай не встигають повністю встановитись в межах сигналу практичної довжини. Таким чином, обробка кожного імпульсного викиду потребує індивідуального підходу. Метод Проні та МПМ мають потенціал для обробки подібних сигналів, оскільки їх структура покладається на перевизначену систему рівнянь.

Іншим типом проблеми, що може зустрічатись в системах обробки сигналів, є проблема розташування приймачів сигналу та проблема точного виставлення частоти генератора. Для випадку цифрової обробки сигналів, де використовуються нормована частота та нормована константа поширення, дані ситуації є еквівалентними і ведуть до некоректної оцінки амплітудних параметрів сигналу, оцінка яких грає важливу роль для задачі дальнометрії. Важливим для вирішення даної проблеми аспектом є те, що у переважній більшості реалізацій методів параметричного спектрального аналізу задача оцінки амплітудних коефіцієнтів є відокремленою від задачі пошуку частот. Це означає, що під час роботи алгоритму частотні коефіцієнти є незмінними. Внаслідок цього перспективним є напрямок поєднання даних процедур шляхом надання можливості коригування частот під час оцінки амплітудних коефіцієнтів.

Оскільки метод Проні та МПМ є давно усталеними і входять в програмне забезпечення відповідного устаткування, існує сенс в розгляді методів, що є надбудовами над стандартними реалізаціями. Всі означені обставини

визначають наукову актуальність та практичне значення досліджень, що проведено в дисертаційній роботі.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Роботу виконано в рамках науково-дослідних робіт “Детерміновані та стохастичні алгоритми комп'ютерного моделювання об'єктів та процесів різної природи”, номер державної реєстрації 0122U001467, “Розробка високоефективних комп'ютерних алгоритмів для аналізу та ідентифікації параметрів математичних моделей”, № держреєстрації 0125U002277, кафедри комп'ютерних технологій факультету прикладної математики та інформаційних технологій ДНУ.

**Мета дослідження.** Розробка ефективних алгоритмів цифрового параметричного спектрального аналізу на базі методів Проні і пучка матриць, стійких не тільки до білого Гауссового шуму, але й до імпульсного шуму, які забезпечують коректну оцінку комплексних показників експонент і амплітуд в експоненціальному розкладанні, що дозволяє поліпшити роботу радіофізичних засобів вимірювання комплексного коефіцієнта відбиття.

**Об'єкт дослідження.** Процес коректної оцінки математичними засобами цифрового параметричного спектрального аналізу параметрів комплексно-експоненціальної моделі.

**Предмет дослідження.** Алгоритми методів Проні та пучка матриць, що забезпечують стійкі оцінки параметрів комплексно-експоненціальних моделей при наявності суміші білого шуму та імпульсних викидів.

Для досягнення мети роботи були розв'язані наступні задачі:

- побудова алгоритму для генерування імпульсної завади;
- побудова програмного комплексу для симуляції впливу діодного детектора та аналогово-цифрового перетворювача на результати вимірювання сигналу для оцінки комплексного коефіцієнту відбиття в мікрохвильовому діапазоні;
- вибір найбільш доцільної оцінки відповідності відновленого сигналу початковому незашумленому для вихідного сигналу, що спотворений комбінацією адитивного білого та імпульсного шуму;

- розробка методів автоматизованої оцінки кількості та розташування імпульсних викидів у сигналі;
- створення математичної моделі хвильоводно-рупорної структури для перевірки застосовності методів параметричного спектрального аналізу до задачі радіодальнометрії;
- розробка алгоритму для ігнорування імпульсних викидів під час обробки сигналу за допомогою методу Проні;
- розробка алгоритму для ігнорування імпульсних викидів під час обробки сигналу за допомогою МПМ;
- оцінка кількості точок, які можуть бути усунені із сигналу з гарантованим збереженням функціональності методу;
- розробка алгоритму для забезпечення можливості коригування вихідних оцінок нормованих частот при оцінці комплексних амплітуд;
- проведення комп'ютерних експериментів для підтвердження можливості застосування отриманих алгоритмів та оцінки їх меж застосовності.

**Методи досліджень.** При розробці нових підходів було застосовано метод математичного аналізу для обґрунтування отриманих алгоритмів. Було застосовано метод моделювання з метою аналізу працездатності створених алгоритмів в умовах близьких до реальних. В ході дослідження було залучено методи багаторазового комп'ютерного експерименту. При цьому для кожної з ситуацій за можливістю генерувалося 1000 реалізацій шуму з подальшим аналізом середніх, медіанних та кватильних значень різноманітних відхилень. До типів відхилень, що досліджувались, включались магнітуда відхилення амплітудних та частотних коефіцієнтів і абсолютні значення відхилення фази разом із середньою потужністю відхилення апроксиманти від незашумленого сигналу. При цьому застосовувався метод порівняння якості оцінки різними підходами, включаючи класичні, що були прийняті за базові. Для пришвидшення експериментів всюди, де це можливо, застосовувались методи багатопоточних обчислень.



### **Наукова новизна одержаних результатів.**

- Вперше в межах методу Проні запропоновано, розроблено і програмно реалізовано алгоритм виключення точок, які спотворені імпульсним шумом.
- Вперше в межах методу пучка матриць запропоновано, розроблено і програмно реалізовано алгоритм виключення точок, які спотворені імпульсним шумом.
- Вперше розроблено метод корекції оцінок показників експонент методом Проні та пучка матриць, які спотворені наявністю шуму (на метод отримано авторське свідоцтво на твір).
- Знайшов подальшого розвитку метод сегментації у застосуванні до методів Проні та пучка матриць
- Знайшов подальший розвиток метод допоміжних джерел для формування поля відбиття в хвилеводно-рупорній структурі (на комп'ютерну програму отримано авторське свідоцтво на твір).
- Знайшов подальший розвиток метод оброблення даних у багатозондовій лінії для уточнення результатів вимірювання комплексного коефіцієнта відбиття на багатьох частотах на основі методу корекції показників експонент.
- Знайшов подальший розвиток метод синтезування часових сигналів за даними багаточастотних вимірювань за допомогою рефлектометричної схеми із застосуванням принципу Фур'є-голографії на основі покращених методів цифрового параметричного спектрального аналізу.

**Практичне значення одержаних результатів.** Розроблені алгоритми реалізації методів цифрового спектрального аналізу, зокрема методи Проні і пучка матриць, можуть бути використані для підвищення якості обробки даних вимірювань у вимірювально-обчислювальних комплексах з синтезуванням часових сигналів і синтезуванням апертури з метою підвищення розділювальної здатності як в поздовжньому, так і поперечному напрямках. Алгоритм уточнення значень показників експонент і відповідних їм амплітуд дозволяють реалізувати

коректні вимірювання комплексного коефіцієнту відбиття за допомогою багатозондових хвильовдних вимірювачів при перестроюванні частоти і відхиленні положень розташування зондів, наприклад, при роботі вимірювача в умовах термічного навантаження, що можуть бути присутніми на реальному виробництві. Алгоритми оцінювання спектральних параметрів при наявності імпульсної завади є корисними для забезпечення вимірювання власних частот об'єктів при імпульсному навантаженні, визначенні напрямків приходу сигналу в антенних решітках при наявності виходу з ладу окремих антенних елементів, аналізу електричних сигналів при наявності імпульсних завад при нестабільній роботі електромереж.

**Особистий внесок здобувача.** В роботах [18]–[28] здобувачеві належать розроблені методи та алгоритми модифікації стандартних підходів до параметричного спектрального аналізу, алгоритми для їх перевірки та програмне забезпечення. В роботі [29] здобувачем було створено симуляцію реального вимірювального тракту та проведено експерименти із застосуванням параметричного спектрального аналізу. Постановка задачі та обговорення результатів здійснювалося сумісно з науковим керівником.

**Апробація результатів дисертації.** Результати дисертаційної роботи було представлено на університетських конференціях (додаток А):

- «Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем» у 2023, 2024 та 2025 р.;
- та на зарубіжних конференціях:
- «Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences» у 2023 та 2024 р.;
  - «International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory» у 2023 та 2025 р.;
  - «International Conference on Smart Technologies in Power Engineering and Electronics» у 2024 р.

### **Структура та обсяг дисертації.**

- *Анотація*, що подана українською та англійською мовою і дає загальний огляд роботи, висвітлює її вміст та головні результати.
- *Список публікацій здобувача*, в якому наведено перелік наукових робіт та тез, що охоплюють наукові здобутки дисертаційного дослідження.
- *Зміст*, в якому наведено ієрархічну структуру дисертаційної роботи.
- *Вступ*, який містить обґрунтування вибору теми дослідження, мету і завдання дослідження відповідно до предмета та об'єкта дослідження, зв'язок роботи з державними науковими програмами, методи дослідження, інформацію про наукову новизну отриманих результатів, особистий внесок здобувача, апробацію матеріалів дисертації, а також структуру та обсяг дисертації.
- *Перший розділ* «Аналіз математичних залежностей для опису досліджуваних об'єктів, області їхньої застосовності, існуючих алгоритмів реалізації методів цифрового параметричного спектрального аналізу. Вибір напрямку дослідження», в якому проведено огляд поточних досягнень в сфері параметричного спектрального аналізу, зокрема – методу Проні та методу пучка матриць (МПМ), які грають важливу роль в поточному дисертаційному дослідженні. В даному розділі обґрунтовується вибір вищеназваних методів для аналізу сигналів, що з'являються в задачах радарного сканування, та зазначаються актуальні проблеми, які є підґрунтям для задач поточної роботи.
- *Другий розділ* «Розвиток існуючих методів та алгоритмів», в якому подано розвиток та застосування існуючих відомих алгоритмів з метою генерації імпульсного шуму, сортування оцінок параметрів та подальшого розвитку методу сегментування сигналу. Також в даному розділі подано алгоритми конкретних реалізацій методу пучка матриць та методу допоміжних джерел які використовувались під час дослідження.
- *Третій розділ* «Запропоновані новітні методи та алгоритми», в якому розглядаються новітні методи та алгоритми, розроблені в ході

дисертаційного дослідження. Зокрема, подано метод пропускання точок для методу Проні та МПМ та метод корекції частот у варіації для звичайних сигналів та для сигналів, що пройшли через різницевий фільтр.

- *Четвертий розділ* «Випробування запропонованих методів та алгоритмів», присвячений комп'ютерному експерименту з метою оцінки ефективності та меж застосовності розроблених методів у порівнянні із класичними для індустрії радіофізичної інтерференційної дальнометрії.
- *Висновки*, в яких висвітлено повне виконання поставлених задач і перелічено досягнення дисертаційного дослідження.

Загальний обсяг основного тексту роботи становить 130 сторінок. Робота містить 69 рисунків і 7 таблиць, список використаних джерел налічує 152 найменування.

## РОЗДІЛ 1 АНАЛІЗ МАТЕМАТИЧНИХ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ ДЛЯ ОПИСУ ДОСЛІДЖУВАНИХ ОБ'ЄКТІВ, ОБЛАСТІ ЇХНЬОЇ ЗАСТОСОВНОСТІ, ІСНУЮЧИХ АЛГОРИТМІВ РЕАЛІЗАЦІЇ МЕТОДІВ ЦИФРОВОГО ПАРАМЕТРИЧНОГО СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛІЗУ. ВИБІР НАПРЯМУ ДОСЛІДЖЕННЯ

### 1.1 Комплексно-експоненціальні залежності та області їхньої застосовності

Комплексно-експоненціальні сигнали є надзвичайно розповсюдженими в різноманітних галузях техніки таких як електроніка та електротехніка [3]–[5] (зокрема – пошук коротких замикань в мережі та оцінка якості електричного живлення, тобто підтримання стабільної частоти і амплітуди), обробка сигналів [30], механіка [31] (аналіз власних частот коливання системи), медицина [32] (аналіз сигналів ЕЕГ та ЕКГ) та теорія керування [33] внаслідок їхньої значущості як загального розв'язку для лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами у звичайних та частинних похідних, наприклад, тих, що описують хвильові процеси і резонансні явища. Опис електромагнітних хвильових процесів і резонансних явищ диференціальним рівнянням другого порядку в частинних похідних впливає з рівнянь Максвелла, які є фундаментом всієї електродинаміки [34]. Саме завдяки такій загальній властивості відповідна модель описує сигнали в інтерферометричних багатозондових мікрохвильових пристроях вимірювання параметрів вібрацій [35], [36].

Модель частотної залежності коефіцієнта відбиття у вигляді суми експоненціальних залежностей широко використовується для розв'язання оберненої задачі для шаруватої діелектричної структури після її зондування електромагнітними хвилями при вимірюванні частотної залежності коефіцієнта відбиття [37]. Дійсно, залежність коефіцієнта відбиття описують нелінійним звичайним диференціальним рівнянням першого порядку Ріккаті, а сама

залежність коефіцієнта відбиття може бути подана як сума експоненціальних складових.

Комплексно-експоненціальні сигнали також з'являються під час аналізу широкого кола динамічних процесів, які мають велику значущість в сучасній науці та техніці [38], [39]. Також важливо зазначити, що подібні методи відповідають розв'язкам автономних диференціальних рівнянь, які можуть бути періодичними за певних умов [40], [41]. Експоненціальні залежності можуть бути отримані як розв'язки задач зв'язаних механічних систем [42], [43]. Як приклад, осциляції подібного типу можуть виникати в системах гальмування рейкових транспортних засобів [44].

Для дійсного сигналу дане подання є більш доцільним, ніж подання за допомогою дійснозначних гармонічних функцій, оскільки воно спрощує багато стандартних операцій.

## 1.2 Математична модель одношарової структури

Розглянемо більш детально базову залежність для проведення неруйнівного контролю мікрохвильовими засобами шаруватої діелектричної структури, а саме, залежність коефіцієнта відбиття  $\underline{R}(\omega)$  для одного шару діелектрика товщиною  $l_1$  з діелектричною проникністю  $\varepsilon_1$  [45], [46]:

$$\underline{R}(\omega) = \underline{H}(\omega) = \frac{\underline{R}_{01} + \underline{R}_{12}e^{-2i\beta_1(\omega)l_1}}{1 + \underline{R}_{01}\underline{R}_{12}e^{-2i\beta_1(\omega)l_1}}, \quad (1.1)$$

де  $\beta_1(\omega) = \frac{\omega\sqrt{\varepsilon_1}}{c}$  – коефіцієнт поширення хвилі,

$\underline{R}_{01}, \underline{R}_{12}$  – комплексні коефіцієнти відбиття Френеля від передньої та задньої меж шару відповідно.

Вираз (1.1) можна використати для побудови формули коефіцієнта відбивання від структури з будь-якою кількістю шарів при рекурсивному

використанні. При цьому  $\underline{R}_{12}$  замінюється на  $\underline{R}(\omega)$ , коефіцієнт відбиття від шаруватої структури, яка знаходиться під даним шаром.

Слід зауважити, що на даний момент напівпрозорі діелектричні елементи знайшли застосування в новітніх антенних системах [47], [48].

Коефіцієнт відбиття (1.1) характеризується в частотній області своїми полюсами:

$$\omega_{p,n} = \frac{\pi - \varphi_{01} - \varphi_{12} - 2\pi n - i \ln |\underline{R}_{01} \underline{R}_{12}|}{2 \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{c} l_1},$$

де  $\varphi_{01}, \varphi_{12}$  – аргументи комплексних коефіцієнтів відбиття Френеля від передньої та задньої меж шару;

$n$  – ціле число.

Тоді при переході з частотної області у часову [49] для коефіцієнту відбиття  $r(t)$  в часовій області буде мати місце вираз:

$$r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} res_n \exp(i\omega_{p,n} t),$$

де  $res_n$  – відповідні лишки.

Таким чином, для часового сигналу буде справедливим подання у вигляді суми експоненціальних складових.

При обмеженні ширини смуги частот і використанні дискретного перетворення Фур'є попередній вираз трансформується до більш складного виду [50].

Вираз (1.1) може бути трансформовано до виду [45]:

$$\underline{R}(\omega) = \underline{R}_{01} + \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - \underline{R}_{01}^2)(-\underline{R}_{01})^{n-1} \underline{R}_{12}^n \exp(i\omega n\tau),$$

де  $\tau = 2 \frac{l_1}{c/\sqrt{\epsilon_1}}$  – час проходження електромагнітної хвилі в шарі діелектрика в прямому і зворотному напрямках.

Така формула, як і (1.1), дозволяє розрахувати коефіцієнт відбиття для багатошарової структури, якщо  $\underline{R}_{12}$  замінити на  $\underline{R}(\omega)$ , коефіцієнт відбиття від шаруватої структури, яка знаходиться під даним шаром. Відповідно, було підтверджено, що частотна залежність коефіцієнту відбиття є сумою зважених експоненціальних залежностей.

Якби можна було вважати, що в матеріалі шару немає частотної дисперсії і коефіцієнти Френеля є константами в нескінченій смузі частот, то обернене перетворення Фур'є мало б вигляд:

$$r(t) = \underline{R}_{01} \delta(t) + \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - \underline{R}_{01}^2)(-\underline{R}_{01})^{n-1} \underline{R}_{12}^n \delta(t - n\tau), \quad (1.2)$$

де  $\delta(t)$  – дельта-функція Дірака.

Така формула дає наочне представлення структури часового сигналу, що складається з низки імпульсів, які відповідають відбиттям від меж шару і передвідбиттям. Зрозуміло, що часовий інтервал між сусідніми піками дозволяє отримати значення часу поширення сигналу в шарі, а амплітуди піків містять інформацію щодо значення коефіцієнтів Френеля, значення яких в свою чергу пов'язані зі значеннями діелектричної проникності матеріалу шару.

Отриманий вираз може бути інтерпретований як спектр частотної залежності, і перехід з частотної області до часової з отриманням значень характерного часу поширення сигналу в шарі, що визначає період осциляцій в



частотній області, є використанням концепції узагальнених власних осциляцій [17].

Відсутність частотної дисперсії у всій нескінченній смузі частот протирічить фізиці процесу, оскільки існують області резонансної взаємодії електромагнітного поля і елементів (молекул, атомів), з яких побудована відповідна речовина. Крім того, не існує можливостей здійснити експериментальні дослідження в зазначеній нескінченній смузі частот. Таким чином, виходячи зі скінченності смуги частот дослідження, вираз (1.2) має бути поданий у вигляді

$$r(t) = a_0 s(t) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n s(t - n\tau), \quad (1.3)$$

де  $a_n$  – амплітудні коефіцієнти, значення яких мають зв'язок зі значеннями коефіцієнтів Френеля;

$s(t)$  – певна функція, яка формується з урахуванням частотної дисперсії і скінченності смуги частот вимірювання та має протяжність, яка суттєво перевищує тривалість дельта-функції.

Остання обставина призводить до того, що відбиття вже не спостерігаються роздільно, значення  $a_n$  внаслідок перекриття залежностей  $s(t)$  спотворюються.

Шлях подолання зазначених проблем полягає у використанні методів параметричного спектрального аналізу, зокрема методів Проні, пучка матриць. Ці методи мають високу розділювальну здатність, але стійкість їх роботи залежить від наявності і характеристик шуму.

У випадку застосування методів радарного зондування даний підхід може бути ефективно застосовано для задач пошуку порожнин або інших неоднорідностей всередині діелектричних структур, що також є нагальною задачею [51].

### 1.3 Голографічні та інтерференційні методи вимірювання

Виходячи із загального виду моделі у вигляді зваженої суми комплексно-експоненціальних складових, зрозумілим є те, що доцільно мати апаратурні засоби експериментального вимірювання комплексного коефіцієнта відбиття. Для вимірювань у сантиметровому і міліметровому діапазонах довжин хвиль перспективними є дванадцятиполюсні (шестипортові) схеми [52], [53]. Має бути вхід для підключення джерела сигналу, вхід для підключення навантаження, яке має бути дослідженим, три виходи для фіксації результатів вимірювання датчиком потужності суми специфічно перетворених трьох опорних сигналів і сигнала відбиття. Таким чином, має бути п'ять портів, або схема має бути десятиполюсником. Для отримання якісних результатів має бути порт для вимірювання потужності генератора, тобто повна схема є дванадцятиполюсником, або шестипортовим пристроєм. Традиційний підхід передбачає використання якісно узгоджених у всій робочій смузі частот елементів, зокрема дев'яносто- і стовісімдесятиградусних гібридів. Така схема зазвичай має доволі великі габаритні розміри [54]. Стандартна процедура калібрування вимагає застосування декількох еталонів комплексного коефіцієнта відбиття. Все це потребує наявності прецизійних елементів мікрохвильової техніки, тобто коштовного обладнання. Для отримання значення комплексного коефіцієнта відбиття загальноприйнятим є розв'язок системи трьох квадратних рівнянь. В роботі [55] пропонується для отримання розподілу неоднорідностей вздовж фідера застосовувати до частотної залежності коефіцієнта відбиття метод пучка матриць.

Між тим, якщо розглядати такий пристрій, як апаратурну реалізацію методу голографії з трьома опорними сигналами [56], для пошуку дійсної та уявної частини комплексного коефіцієнта відбиття може бути сформована система лінійних алгебраїчних рівнянь, розв'язування якої допускає застосування всіх класичних методів регуляризації розв'язку такої системи [57].

Метод дванадцятиполюсника [52], [53] є усталеним методом вимірювання комплексного коефіцієнта відбиття. Для реалізації даного методу необхідне використання спеціалізованих хвильоводних структур з бажаними параметрами. Цей факт може призвести до великих розмірів, незручної форми та високої вартості вироблення подібного приладу. Внаслідок цього багато зусиль було прикладено до пошуку більш компактних та простих систем для вимірювання комплексного коефіцієнта відбиття, одним з яких є вимірювальна лінія [52].

Методологія методу голографії з трьома референсними сигналами дозволяє отримати ефективний алгоритм обробки даних вимірювань трьохзондової вимірювальної хвильоводної лінії, де здійснюється отримання потужності для сум трьох референсних та вимірювальних сигналів. Такий вимірювальний пристрій є суттєво більш компактним пристроєм у порівнянні з пристроями на основі гібридів, але є проблемою його використання для багаточастотних вимірювань у широкій смузі частоти. Класичний варіант використання багатозондової хвильоводної лінії передбачає застосування чотирьох зондів. Такий підхід дозволив реалізувати виміри на одній частоті фазової характеристики відбиття і на цьому підґрунті визначення характеристик переміщення об'єктів, зокрема параметрів вібрації [58]. Загальну схему діодної вимірювальної лінії можна побачити на рис. 1.1.

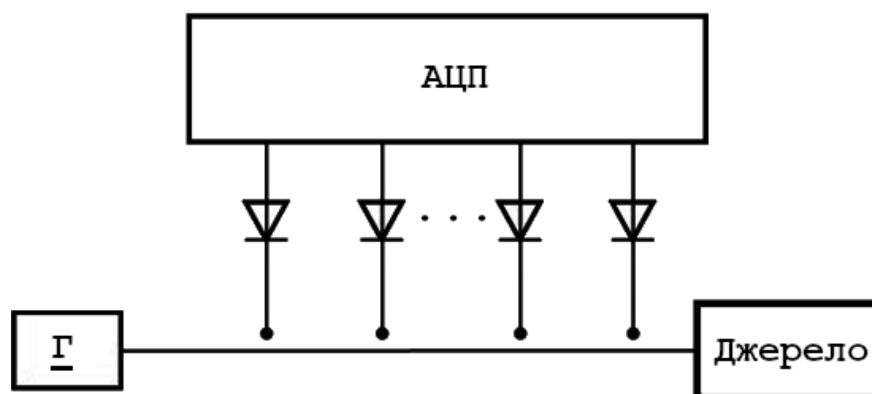


Рис. 1.1. Схема вимірювання комплексного коефіцієнта відбиття за допомогою багатозондового вимірювача

Для випадку отримання результатів за допомогою багатозондової вимірювальної лінії з використанням діодів значення можуть бути пропорційними як потужності, так і іншим функціям від неї в залежності від струму зсуву на детекторі, та магнітуди падаючої хвилі [59]. Даний факт може бути проблематичним для параметричних методів аналізу, оскільки він вносить спотворення в результуючий сигнал і робить його не повністю відповідним до початкової моделі. У певних випадках подібні неточності можуть призводити до неоднозначності точок для малих значень магнітуди [60].

Згідно з [61] класичний випадок передбачає розміщення зондів з детекторами у хвилеводі еквідистантно на відстані  $\Lambda/8$  один від одного ( $\Lambda$  – довжина хвилі в хвилеводі), причому вважається, що детектори забезпечують вимірювання значень потужності  $P_m$ , отриманих з детекторів з номером  $m$ , які мають вигляд:

$$P_m = k_m P_0 \left| \exp\left(-i \frac{2\pi \Lambda}{\Lambda} \frac{\Lambda}{8} (m-1)\right) + \Gamma \exp\left(i \frac{2\pi \Lambda}{\Lambda} \frac{\Lambda}{8} (m-1)\right) \right|^2, \quad (1.4)$$

де  $m = 1, 2, 3$  – номер зонда,

$P_0$  – потужність падаючої хвилі.

Компоненти  $\exp\left(-i \frac{2\pi \Lambda}{\Lambda} \frac{\Lambda}{8} (m-1)\right)$  виконують роль опорних сигналів, а компоненти  $\Gamma \exp\left(i \frac{2\pi \Lambda}{\Lambda} \frac{\Lambda}{8} (m-1)\right)$  несуть інформацію про комплексний коефіцієнт відбиття  $\Gamma$ . Коефіцієнти пропорційності  $k_m$  і значення  $P_0$  для кожного з детекторів усуваються з остаточних виразів шляхом ділення результатів вимірювань (1.3) на результат вимірювань в режимі біжучої хвилі, тобто при узгодженому навантаженні, яке дорівнює  $k_m P_0$ . Три нормованих у такий спосіб величини  $p_m$  мають вигляд:

$$p_1 = |1 + \Gamma|^2; \quad p_2 = \left| e^{-j\frac{\pi}{2}} + \Gamma \right|^2; \quad p_3 = |e^{-j\pi} + \Gamma|^2.$$

Згідно з означеною технологією обробки необхідно сформулювати величини  $p_1 - p_2$  та  $p_1 - p_3$ . Така процедура формує систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо дійсної ( $\Gamma'$ ) і уявної частини ( $\Gamma''$ ) комплексного коефіцієнта відбиття:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma' \\ \Gamma'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 - p_2 \\ p_1 - p_3 \end{bmatrix}. \quad (1.5)$$

Число обумовленості матриці правих частин системи дорівнює 2.618, це несуттєво більше числа обумовленості для матриці, що формується для випадку 4-х зондів, яке дорівнює 1. Розв'язок системи (1.5) може бути записано в явному вигляді:

$$\Gamma' = 0.25(p_1 - p_3); \Gamma'' = 0.25(p_1 - 2p_2 + p_3).$$

Насправді проводиться вимірювання сумарного коефіцієнта відбиття випромінюючої системи і внесеного коефіцієнта відбиття досліджуваного об'єкта, тому необхідно додатково провести вимірювання коефіцієнта відбиття антени при випромінюванні у вільний простір і відняти його з результатів вимірювань при наявності досліджуваного об'єкта. Саме після такого віднімання фаза  $\varphi$  отриманого комплексного коефіцієнта відбиття  $\underline{\Gamma} = |\underline{\Gamma}| \exp(j\varphi)$  пов'язана лінійним співвідношенням з відстанню до об'єкта дослідження, що і дозволяє визначити останню, точніше зсув положення об'єкта від реперного положення, оскільки вимірювання одного значення фази дає тільки відносний зсув, а не значення абсолютної відстані.

Такий доволі простий спосіб обробки базується на гіпотезах про точне знання відстані між зондами і довжини хвилі в хвилеводі. При проведенні вимірювань при термічному навантаженні проходить викривлення перерізу хвилевода і зміна відповідної довжини хвилі, а також відстані між зондами, тобто потрібний метод уточнення відповідних показників експонент, що може бути

досягнуто з використанням методів типу Проні та його модифікацій. Задача суттєво ускладнюється при зміні частоти сигналу, встановлення якої не може бути виконано абсолютно точно. Розв'язок означених задач робить доцільним розробку методу корекції оцінки показника експоненти за експериментальними даними.

Оскільки коефіцієнт відбиття являє собою єдине комплексне число, для його оцінки достатньо двох значень вимірювань у вигляді дійсних чисел, тобто достатньо двох зондів з детекторами. Такий підхід був проаналізований в [15], [36]. Для випадку  $\Delta l = \frac{\Lambda}{8}$ , розглянутому в даній роботі, отримані явні вирази для визначення комплексного коефіцієнта відбиття. Розв'язок є неоднозначним і завжди надає два можливих значення модуля, один з яких обов'язково є таким, що не відповідає дійсності. Через це на значення кореня даного рівняння накладається умова, яка зазвичай виконується для випадку вимірювань відбиття від об'єкта, що знаходиться у вільному просторі на певній відстані від апертури антени вимірювача.

Недоліком одночастотного вимірювання є те, що воно дозволяє вимірювати лише відносні відстані в межах половини довжини хвилі. Як демонструється в [62], [63], дана обставина дозволяє використовувати подібні методи лише для вимірювання відносного зсуву від початкового відомого положення. Окрім цього, даний метод є чутливим до появи додаткових джерел відбивання. У [10] розглядається можливість математичної обробки результату багатозондового вимірювання в присутності заважаючого відбиття від апертури антени. Коректне виконання необхідних процедур вимагає переходу до тризондової секції. Таким чином, використання двох зондів носить скоріше академічний характер. Як можна побачити, даний процес включає в себе достатньо вибагливі розрахунки.

Методи отримання даних на основі вимірювальної лінії вимагають значно зручнішого обладнання, проте однією з їх вад є вузький проміжок частот, в якому за допомогою них можна проводити вимірювання. Даний факт пов'язаний з тим,

що співвідношення між відстанню між зондами (або положеннями одного зонда) та довжиною падаючої хвилі впливає на значення констант, які використовуються для стандартних методів розрахунку. Таким чином, застосування приладу на частоті, що відмінна від тієї, для якої він був налаштований, має призвести до хибних оцінок. Дослідженню найбільш доцільного розташування зондів для максимізації стійкості приладу на основі вимірювальної лінії до похибок при вимірюванні присвячено роботу [64].

Зазвичай вимірювання фази є набагато більш трудомістким і, відповідно, коштовним, ніж вимірювання амплітудних характеристик. Голографічний підхід передбачає отримання модуля (квадрата модуля) інтерференційної картини опорного сигналу і власно сигналу, що досліджується. Можна виділити два принципових підходи, які відповідають принципам Фур'є-голографії і голографії на зустрічних пучках [65]. Метод Фур'є-голографії дозволяє отримати розподіл неоднорідностей в часовій (а після множення на швидкість світла і в просторовій) області без безпосереднього вимірювання частотної залежності коефіцієнта відбиття. Останню залежність можна відновити шляхом переходу із часової області до частотної для відповідного фрагменту часового сигналу, який має бути виділений часовим вікном. Доцільним є обрання форми такого вікна у вигляді функції Баттерворта.

Принцип Фур'є-голографії покладено в основу роботи вимірювальних комплексів [61]. В якості опорного відбиття використано відбиття від переходу хвилевід-рупор. Для найбільш ефективного варіанту комплексу діапазон вимірювань складав від 38 до 52 ГГц, з кроком по частоті 54.69 ГГц, тобто вимірювання проводилось у 256 точках. Для перестроювання частоти було використано свіп-генератор, в якості вимірювальної схеми використовувався рефлектометр з двох спрямованих хвилеводних відгалужувачів. Випромінювання здійснювалось з рупору довжиною 120 мм і розмірами апертури 46 на 46 мм. Канал хвилеводів у всіх елементах схеми складав 5.2 на 2.6 мм. Перетворення Фур'є вимірної характеристики відбиття в частотній

області забезпечувало синтезування в часі імпульсів тривалістю на рівні 3 дБ порядку 70 пс.

Для спрощення розгляду проаналізуємо випадок одного опорного сигналу  $r_0 \exp(i\omega t_0)$ , який формується за рахунок відбиття від опорної неоднорідності і спостерігається в момент часу на  $t_0$  раніше, ніж відбиття від структури, що має бути досліджена і має коефіцієнт відбиття  $\underline{R}(\omega)$ . Тоді при вимірюванні за допомогою квадратичного детектора буде отримано сигнал, пропорційний потужності

$$A(\omega) = k |r_0 \exp(i\omega t_0) + \underline{R}(\omega)|^2 \\ = k \{ |r_0|^2 + |\underline{R}(\omega)|^2 + r_0 \exp(i\omega t_0) \underline{R}^*(\omega) + r_0 \exp(-i\omega t_0) \underline{R}(\omega) \},$$

де  $k$  – коефіцієнт пропорційності характеристики детектора.

Окремо проводиться вимірювання за умови відсутності об'єкта, що має бути досліджений, тобто окремо проводять вимірювання опорного сигналу. Такий сигнал має вид  $A_0(\omega) = k|r_0|^2$ . Після віднімання такого сигналу з вимірюваного при наявності досліджуваного об'єкту має бути отримано наступний вираз:

$$A(\omega) = k \{ |\underline{R}(\omega)|^2 + r_0 \exp(i\omega t_0) \underline{R}^*(\omega) + r_0 \exp(-i\omega t_0) \underline{R}(\omega) \}.$$

Таким чином, сигнал для такої вимірювальної схеми відноситься до класу суми комплексних складових. Для отримання часового сигналу зазвичай використовують дискретне перетворення Фур'є. Часовий сигнал набуває вигляду

$$a(t) = k \{ s_R(t) + r_0 r(-t + t_0) + r_0 r(t - t_0) \},$$



де  $r(t - t_0)$  – часовий сигнал  $r(t)$ , який зсунутий на  $t_0$  від точки початку відліку часу,

$r(-t + t_0)$  – дзеркальне відображення зазначеного сигналу для від’ємного часу,

$s_R(t)$  – автокореляційна функція часового сигналу  $r(t)$ .

Якщо  $t_0$  перевищує тривалість сигналу структури, всі три компоненти сигналу спостерігаються в областях, що не перекриваються. Виділення відповідним часовим вікном компоненти  $r_0 r(t - t_0)$  після переходу до частотної області дозволяє отримати частотну залежність комплексного коефіцієнта відбиття [66].

Як відомо, обернене перетворення Фур’є від комплексної амплітудно-частотної характеристики є імпульсним відгуком системи [67]. Таким чином, синтезований часовий сигнал у граничному випадку є відгуком системи на збудження імпульсом нульової довжини. В реальності діапазон частот, в якому можливо проводити вимірювання, є обмеженим, і комплексна амплітуда зберігається лише для певних частот, що веде до використання дискретних методів обробки і отримання синтезованих імпульсів певної тривалості. Між тим процедура екстраполяції виміряної частотної характеристики призводить до суттєвого скорочення синтезованих імпульсів [67].

На відміну від моночастотних методів вимірювання багаточастотні методи після переходу до часової області забезпечують вимірювання більш значних відстаней з обмеженням, яке обумовлено ефектом фолдингу для відстаней, які перевищують границю Найквіста в результуючій часовій залежності. Даний метод дозволяє детально досліджувати багаточастотні складні структури [61], [68]. В залежності від того, чи є отримані дані комплексними або суто магнітудними, результуючий сигнал може відображати абсолютні або відносні відстані в структурі відповідно. В останньому випадку значення абсолютних відстаней також можуть бути отримані за допомогою використання опорної неоднорідності на відомій відстані. В [69], [54] продемонстровано, що в якості

даної неоднорідності може виступати відбиття на переході хвилевід-горловина рупора. Однією з проблем даного підходу є те, що аналіз сигналу на основі квадрату магнітуди генерує піки для всіх комбінацій відносних відстаней, які існують в структурі, що може призвести до хибної ідентифікації структурних елементів. Такі ефекти можуть спостерігатися при накладанні відбиття у вимірювальному тракті на відбиття власно в досліджуваній структурі.

Підхід з комплексним сигналом дозволяє уникнути проблем з фіктивними відбиттями, проте вимагає вимірювання фази коефіцієнта відбиття, що є більш складним і вимагає коштовнішої апаратури, зокрема – вимірювача комплексного коефіцієнта відбиття, який здатен працювати в широкому діапазоні частот.

Для випадку вимірювання коефіцієнта відбиття сигнал на зонді може бути поданий [13] як результат інтерференції двох зустрічних плоских хвиль. Наявність декількох зондів, розміщених на певній відстані один від одного, може розглядатися як товста плівка у дискретному виконанні, що дозволяє розглядати вимірювач такого класу як дискретний аналог голографії Ю. Денисюка [65]. Відновлення об'єкту для такого класу голографії досягається опроміненням білим світлом, де ефективна інтерференція спостерігається для довжини хвилі, на який було здійснено запис. Таким чином, перетворення Фур'є інтерференційної картини в багатозондовій секції буде еквівалентно опроміненню відповідною плоскою хвилею. В роботі [14] доведено, що комплексний коефіцієнт відбиття  $\underline{\Gamma} = \Gamma' + j\Gamma''$  можна отримати з системи рівнянь:

$$2 \begin{bmatrix} \Re \vec{E}_n^T \\ \Im \vec{E}_n^T \end{bmatrix} [\Re \vec{e} \quad -\Im \vec{e}] \begin{bmatrix} \Gamma' \\ \Gamma'' \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} \Re q_n \\ \Im q_n \end{bmatrix}, \quad (1.6)$$

де  $\vec{E}_n = [e^{j\gamma_n l_0} \quad e^{j\gamma_n l_1} \quad \dots \quad e^{j\gamma_n l_{M-1}}]^T$ ,

$\vec{e} = [e^{j\gamma l_0} \quad e^{j\gamma l_1} \quad \dots \quad e^{j\gamma l_{M-1}}]^T$ ,

$\gamma_n = \frac{\pi n}{M\Delta l}$ ,

$$\gamma = \frac{2\pi}{\Lambda},$$

$$l_m = 2m\Delta l,$$

$\Re$  та  $\Im$  – дійсна та уявна частини відповідно,

$q_n$  –  $n$ -ий відлік дискретного перетворення Фур'є від розподілу результату вимірювання потужності на зондах  $q_n$ ,

$\Lambda$  – довжина хвилі в хвильовдній структурі в місці розташування зондів та

$\Delta l$  – крок розташування зондів.

При цьому було показано, що за виконання умови  $\gamma = \frac{\pi}{M\Delta l}$  виконується  $\underline{\Gamma} = q_1$ . При цьому важливо виконання умови  $M \geq 3$ . Головним недоліком даного методу є необхідність в точному виставленні або вимірюванні міжзондової відстані. Оскільки (1.6) містить в собі значення довжини хвилі даний метод також вимагає точного знання геометричних параметрів хвильоводу та точного налаштування генератора електромагнітного збудження.

Прикладами застосування радарних систем для вимірювання відстаней є аерокосмічна індустрія, де радарні системи використовуються для потреб локації, вимірювання висоти та отримання даних про форму рельєфу [70], та дефектоскопія, де радіочастотні системи використовуються для неруйнівного контролю [71]. При цьому, на відміну від аерокосмічної галузі, вимоги до швидкодії вимірювальної установки є дещо послабленими, оскільки вимірювана структура зазвичай є стаціонарною або в стані повільного руху в той час як вимоги до точності є підвищеними. Вимірювання стаціонарних елементів за допомогою інтерферометричних методів, одним з яких є радарна дальнометрія на основі хвильовдних структур, є нагальною сучасною задачею [72]. В класичному випадку для подібних досліджень використовують хвилі оптичного діапазону [73], проте застосування хвиль радіодіапазону може значно спростити необхідну апаратуру.

Якщо підвищення розділювальної здатності в поздовжньому напрямку має бути забезпечено використанням цифрового параметричного спектрального аналізу, оскільки розподіл відбиття від неоднорідностей має бути поданий у

вигляді суми комплексно-експоненціальних компонент, то шлях до підвищення у поперечній площині полягає у використанні методу синтезу апертури [70], який в багатьох випадках неруйнівного контролю зводиться до оберненого синтезу апертури, коли об'єкт дослідження переміщують у поперечному напрямку перед нерухомою антеною [74]. Запропонована техніка передбачає проведення калібрування на сигнал відбиття від смужки, обмеженням є неможливість у реальному експерименті витримати точно відстань від об'єкта до апертури, тобто провести сканування без перекосу. Для компенсації впливу перекосу потрібно отримати значення відстані з великою точністю. Для розв'язку такої задачі є перспективним застосування методів параметричного спектрального аналізу.

#### 1.4 Властивості шуму в експериментальних даних

Відомо, що при вимірюванні будь-якої величини виникають похибки. В радіофізичних вимірюваннях значна доля похибок припадає на дію адитивного шуму. Шуми, які виникають в певній радіовимірювальній системі, залежать як від загальних особливостей електронних схем, так і від будови конкретного вимірювача.

Найбільш відомим та поширеним типом шуму в електронних приладах є шум Джонсона-Найквіста, або термальний шум [75]. Існування даного типу шуму зумовлено тепловим рухом носіїв заряду в провідниках. Саме цей тип шуму часто є лімітуючим фактором для точності чутливого вимірювального обладнання. Даний тип шуму не залежить від напруги на певному елементі, проте залежить від його температури. При цьому для густини потужності шуму можна отримати [75]

$$p(f) = k_B T,$$

де  $k_B$  – константа Больцмана,

$T$  – температура провідника в кельвінах.

Важливою властивістю такого шуму є те, що спектральна густина практично не залежить від частоти, тобто має характеристики, які доволі близькі до характеристик білого шуму [76].

Внаслідок мініатюризації розмірів та використання надмалих струмів в сучасній електроніці, іншим важливим типом шуму є так званий дробовий шум. Даний шум виникає внаслідок дискретної природи електричного струму і проявляється при подоланні носіями заряду різких переходів в компонентах схеми. Для даного типу шуму дисперсію електричного шуму в певній смузі частот можна записати [76] як

$$\sigma_i = \sqrt{2qI\Delta f},$$

де  $q$  – елементарний заряд,

$I$  – значення постійного струму,

$\Delta f$  – ширина смуги частот.

Відповідно до цього, на узгодженому навантаженні густину потужності даного типу шуму можна записати як

$$p(f) = \frac{qIR}{2},$$

де  $R$  – опір навантаження.

Іншим типом шуму, який може з'являтися у напівпровідникових пристроях, є імпульсний шум. Даний шум проявляється як випадкові сходинкоподібні переходи напруги або струму в пристрої між двома або більше рівнями [76]. На даний момент немає єдиної теорії, яка повністю описувала б усі прояви такого типу шуму, проте найбільш розповсюдженою причиною вважається накопичення та вивільнення носіїв заряду в дефектах всередині

напівпровідникових пристроїв. Математично подібні шуми моделюються як телеграфний процес.

Іншим розповсюдженим джерелом імпульсного шуму у вимірювальних системах є флуктуації напруги в мережі живлення внаслідок її раптового навантаження, що може бути спричинене увімкненням або вимкненням важкої апаратури.

В умовах, коли крок вимірювання є достатньо довгим, імпульсний шум перетворюється на послідовність поодиноких викидів. Даний тип імпульсного шуму розглядається у поточній дисертаційній роботі.

Білий шум є розповсюдженим, але не єдиним, який може з'являтися в сигналах радіовимірювальних систем. В залежності від конфігурації вимірювальної системи і, особливо, коли вона складається із багатьох напівпровідникових елементів, суттєвим стає також вклад дробового шуму, який може виражатись як послідовність нечасто розташованих імпульсів в сигналі.

Виходячи з того, що сьогодні обробка носить цифровий характер, при розгляді характеру шуму потрібно врахувати вплив аналогово-цифрових перетворювачів (АЦП), які при збої розряду будуть формувати імпульсну заваду. Взагалі з розвитком цифрової техніки і засобів її моделювання при вивченні впливу роботи АЦП [77] доцільне проведення комп'ютерної симуляції для визначення реальних характеристик шумів і завад.

Виходячи з подання досліджуваних сигналів у вигляді суми експоненціальних функцій, для дослідження впливу імпульсної завади доцільно застосовувати математичний апарат, який був використаний в роботі [78] для дослідження сигналів вібрації при наявності імпульсних спотворень.

З метою покращення точності оцінок параметрів сигналу в умовах подібного шуму в [79] було випробувано застосування альтернативних мір відхилення сигналу, заснованих на вимірюванні довжини сегменту, на якому дані відхиляються від моделі, на відміну від стандартних методів, що також беруть до уваги значення відхилень.

Окрім цього, в межах даної роботи було проведено експерименти щодо застосування методу сегментування сигналу для покращення здатності параметричних методів спектрального аналізу до аналізу сигналів з імпульсним шумом та сигналів, в яких значення сигнал/шум (SNR) не є постійним [80]. При цьому було продемонстровано, що застосування подібного підходу є доцільним, проте потребує додаткового дослідження з точки зору вибору критерія якості сегменту.

Для випадку сигналу з імпульсним шумом використання квадратичної норми як міри якості відтворення сигналу в умовах відсутності ідеального оригіналу є недоцільним, оскільки така міра надає перевагу відтворенням сигналу, які намагаються включити в себе шумовий пік і зменшують точність оцінки інших частин сигналу. Для оцінки точності в подібних випадках необхідно користуватись мірою, яка бере за головну рису відхилення не абсолютну величину відхилень, а їх кількість. Даний підхід носить назву методу мінімуму протяжності і на даний момент є одним із методів, що знаходяться в активному розвитку [81]–[85]. Подібна міра призведе до отримання оцінки, яка майже ідеально відтворює сигнал в усіх точках окрім шумового піку за умови правильно обраної моделі. В ідеальному випадку подібна міра може бути записана як

$$\rho = \sum_{n=0}^{N-1} f(\hat{s}_n - s_n),$$

де

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0. \end{cases} \quad (1.7)$$

Для випадку реального сигналу подібна оцінка майже в усіх випадках дасть значення відхилення, що дорівнює кількості точок сигналу, оскільки

ймовірність ідеального співпадіння оцінених значень з наявними в сигналі є дуже малою. З метою аналізу реальних сигналів необхідно модифікувати даний метод з урахуванням того, що (1.7) може бути подана у вигляді

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} |x|^{\frac{1}{\alpha}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Використання скінченного значення  $\alpha$  дає функцію, яка дозволяє сигналу трохи відхилятися від ідеального і при цьому надає точкам з сильним відхиленням значення, які майже не залежать від величини відхилення. В багатьох випадках модифікується не лише значення  $\alpha$ , і повна функція набуває вигляду

$$f_{\sigma}(x) = \{|\hat{s}_n - s_n|^2 + \sigma^2\}^{\frac{1}{\alpha}} - \sigma^{\frac{2}{\alpha}},$$

де  $\sigma$  – стандартне відхилення білого шуму, а для параметру часто обирається значення  $\alpha = 16$ .

Однією з головних проблем даного підходу часто є нелінійність систем рівнянь, які необхідно розв'язати для отримання оцінок [79]. Дана проблема призводить не лише до складності алгоритмів розрахунку, але і до підвищених вимог до обчислювальної техніки. Внаслідок цього особливо цінними є методи, які дозволяють звести проблему до пошуку коренів лінійних та поліноміальних рівнянь, для яких існують ефективні методи комп'ютерного розв'язку. Це і обумовлює доцільність використання методів типу Проні та пучка матриць.

Іншою проблемою параметричних методів є факт того, що внаслідок особливостей процесу вимірювання або розповсюдження сигналу його кінцева форма може відрізнитись від тієї, яку здатна підтримувати модель. Прикладом цього є частотно-модульовані гармонічні сигнали. Застосування стандартних методів параметричного спектрального аналізу може призводити до значних



відхилень в оцінці параметрів або до розрахункових помилок в алгоритмі. Для придушення подібних помилок на даний момент було розроблено підходи, що дозволяють застосовувати параметричні методи на коротких сегментах сигналу, на яких параметри можна вважати сталими [86].

У поточній роботі однією з цілей було дослідження застосування сегментації сигналу для покращення точності оцінок його характеристик та подальший розвиток подібного підходу.

### 1.5 Симуляція електромагнітних хвиль

Реальний експеримент має багато неконтрольованих факторів, які важко утримувати точно та постійними під час експерименту. Наприклад, відстань до об'єкту встановлюється з певною погрішністю, при проведенні сканування майже неможливо запобігти перекосів, що зумовлює перш за все фазові спотворення та помилки при проведенні синтезування апертури. З цього випливає доцільність проведення перевірки підходів на результатах симуляції електромагнітних полів відбитих або розсіяних на об'єктах дослідження з урахуванням формування полів в антенних та хвилевідних структурах.

Більшість сучасних методів симуляції електромагнітних полів, таких як ANSYS HFSS, спираються на метод скінченних елементів, що є універсальним для розв'язку рівнянь математичної фізики [87], [88], в той час як інші спираються на метод моментів, який є спеціально розробленим для задач електромагнетизму [89]. Даний підхід є перевіреним та спирається на багаторічний досвід, проте має певні недоліки, які роблять його недоцільним для даного дослідження.

По-перше, більшість продуктів для проведення розрахунків за методом скінченних елементів є коштовними у використанні, а їх доступніші аналоги мають обмежену функціональність.

Іншим недоліком методу скінченних елементів є необхідність розрахунку відповідного поля в усіх точках простору, які наявні в об'ємі симуляції.

Зменшення кількості комірок для розрахунку при цьому веде до погіршення точності симуляції, і мінімальна необхідна кількість для її дотримання достатньо часто є зовеликою для розрахунків на звичайних ПК, особливо для випадків коротких довжин хвиль. Даний факт продемонстровано в [90] для акустичних хвиль, що є задачею математично аналогічною до дослідження електромагнітних явищ. Незважаючи на універсальність методу скінченних елементів, потрібний контроль коректності отриманих результатів, оскільки в певних ситуаціях отримання дійсно коректних результатів потребує доволі копітких досліджень [91], [92] з адаптивним добором розмірів комірок.

Внаслідок цього для проведення симуляцій в роботі було обрано метод допоміжних джерел [93], [94]. В даних статтях наведено порівняння розрахункових результатів і даних реального експерименту, які підтвердили коректність застосування методу для моделювання роботи вимірювального комплексу [93] в діапазоні 38-52 ГГц.

Головна ідея даного методу допоміжних джерел полягає в розбитті двовимірної моделі хвилеводної структури на «дроти» зі струмом. Дані «дроти» симулюють тангенціальну густину струму, яка утворюється на поверхнях провідників під час їх взаємодії зі збуджуючим електромагнітним полем. Комбінація поля, що випромінюється даними «дротами», та початкового збуджуючого поля тоді відповідає результуючому полю в системі. Подібна задача є достатньо простою для розрахунку, оскільки поле, що випромінюється дротом зі струмом, є відомою та розв'язаною задачею. Цей метод вимагає лише розрахунку поля в місцях розташування поверхонь хвилеводної системи та зонах вимірювання, що значно пришвидшує процес симуляції. Якість отриманих результатів при цьому залежить виключно від густини розташування «дротів». Даний факт перетворює двовимірну задачу згущення скінченних елементів до одновимірної задачі згущення точок на кривих, що значно зменшує розмір матриць систем лінійних алгебраїчних рівнянь, необхідних для розрахунку, і, відповідно, кількість оперативної пам'яті та час, необхідний для цього.

Головною складністю при розрахунках за даним методом є те, що ідеально тонкі дроти утворюють поля, які мають сингулярність в точці їх розташування. Умова ідеальної провідності вимагає відсутності поздовжнього поля на поверхні провідника і, відповідно, вимірювання поля на них. Це означає, що допоміжні джерела мають розташовуватись на певній відстані від поверхні. Даний факт ускладнює розв'язання задачі, розділяючи її на дві зони за принципом еквівалентності [95] та погіршуючи точність результуючого розв'язку.

Для покращення якості симуляції та простоти програмування в дослідженні було застосовано модифікацію методу допоміжних джерел, в якій ідеально тонкі «дроти» замінюються на тонкі осередки струму з Гауссівським розподілом, що дозволяє розраховувати значення поля в місцях їх розташування, значно спрощуючи розрахунки та покращуючи їх точність [96].

#### 1.6 Методи аналізу комплексно-експоненціальних сигналів

Комплексно-експоненціальні сигнали або сигнали, які можна до них звести, можливо аналізувати за допомогою великої кількості методів, що діляться на дві основні групи: параметричні та непараметричні. Параметричні методи застосовуються для якісного відновлення форми спектру та оцінки спектральних параметрів [97]. До першої групи можна віднести методи, що використовують рекурсію Левінсона, вони забезпечують стійке відновлення коефіцієнтів характеристичного полінома при наявності шуму, але корені полінома дають доволі неточні оцінки спектральних параметрів навіть при відсутності шуму. Інша група методів, де класичним представником є метод Проні, дають у відсутності шуму максимальну точність оцінки спектральних параметрів, але є доволі чутливими до впливу шуму.

До базових непараметричних методів можна віднести дискретне перетворення Фур'є [98] та метод періодограм [99]. Дані методи є загальними і, таким чином, дозволяють аналізувати сигнали будь-якої форми без прив'язки до конкретних моделей.

Непараметричні методи мають декілька недоліків. Як показано в [100], внаслідок того, що результуючий сигнал перетворення Фур'є є дискретизованим на еквідистантній сітці, при знаходженні шуканого значення максимуму піку між положеннями дискретів похибка досягає половини дискрету у випадку, коли сусідні піки не перекриваються і не спотворюють один одного. Даний недолік може бути частково усунений шляхом зменшення дискрету за рахунок додавання нульових відліків до сигналу [101], проте це призводить до викривлення результуючої кривої за рахунок ефекту Гіббса [102]. Даний підхід лише зменшує неточність, проте не усуває її фундаментальних причин. Явище Гіббса може бути придушене шляхом застосування віконних функцій. Компромісом між складністю і гарними характеристиками є вікно Хемінга [103]. Для збереження амплітуди піка, а не енергії сигналу під кривою у часі, має бути застосовано модифіковане вікно у вигляді

$$W(t) = 1,0 - \frac{0,46}{0,54} \cos(2\pi t/T),$$

де  $T$  – період сигналу.

Висока розділювальна здатність, відсутність розпливання піку і формування спектральної компоненти у вигляді одного відліку досягається за умови перетворення цілої кількості періодів сигналу [104]. В загальному випадку інтервал спостереження не охоплює цілу кількість періодів кожної з досліджуваних компонент. Тоді на межі двох сусідніх інтервалів спостерігається стрибок для таких компонент. Таке явище завжди спостерігається у випадку аперіодичних сигналів, таких, як загасаючі коливання, де результуюче зображення стає спотвореним. Дані спотворення можуть бути частково придушені методом накладання віконних функцій, проте їхнє застосування також призводить до спотворення форми сигналу, зокрема – його амплітудної характеристики [101].

Параметричні методи мають певні переваги для аналізу сигналів з відомою математичною моделлю. В даній роботі розглядаються такі методи як метод Проні та метод пучка матриць (МПМ), які дають пряму оцінку параметрів сигналу на відміну від таких методів, як MUSIC, що потребує перебору значень алгоритмами пошуку локальних максимумів [105]. Оскільки такі параметри сигналу, як амплітудні коефіцієнти та частоти, розраховуються напряму, їхні значення для випадку сигналів без шумів можуть ідеально відповідати істинним. Окрім цього, методи розрахунку для оцінки параметрів можуть бути побудованими так, щоб зменшувати вплив неточності вимірювання на результати оцінок. До подібних методів для лінійних алгоритмів відносять, наприклад, методи регуляризації [106].

Метод Проні початково був розроблений Гаспаром де Проні в 1795 р. [107] для розрахунків, необхідних для задачі про випаровування суміші рідин. Даний метод базується на відомому принципі авторегресії у вигляді рівняння лінійного передбачення. В подальшому алгоритм цього методу було покращено, а його межі застосовності – розширено. В [108] продемонстровано розвинення ідеї методу Проні на випадок комплекснозначного гармонічного сигналу. З метою покращення стійкості методу до білого шуму, який є одним з найбільш розповсюджених типів, було розроблено алгоритм методу з перевизначеною системою.

Існує декілька усталених методів розв’язку даної системи. До них входять метод псевдоінверсії Мура-Пенроуза [109] та його розвиток у вигляді методу Кумаресана-Тафтса [110]. Дані методи дозволяють розв’язувати систему лінійних алгебраїчних рівнянь метода Проні в неоднорідному вигляді, який потребує додаткових комп’ютерних операцій для реалізації. Іншим методом, який дозволяє шукати розв’язки системи методу Проні в однорідному вигляді, є метод сингулярного розкладання [111], який на практиці можна реалізувати шляхом пошуку власних векторів матриці.

Метод пучка матриць (МПМ) можна вважати подальшим розвитком методу Проні [112], оскільки він також спирається на задачу лінійного

передбачення відліку сигналу за даними про попередні відліки і може бути зведений до стандартного методу Проні відповідним підбором параметра. Даний метод базується на понятті лінійного пучка матриць, що дозволяє йому мати контрольований параметр, який можна регулювати для досягнення кращої якості пригнічення шуму або швидкості розрахунку [113]. МПМ знайшов широке застосування в галузі радарного пошуку напрямку [114].

Процес розв'язку задачі МПМ є алгоритмічно складнішим за метод Проні і в своєму первинному вигляді може давати додаткові хибні значення частот для шумливого сигналу. Внаслідок цього для коректного аналізу сигналу за допомогою цього методу необхідно застосовувати додаткові алгоритми, що спираються на відому кількість компонент моделі для відсіювання даних, які утворюють хибні значення частот. Один з алгоритмів, який було обрано для подальшого застосування в даній роботі, подано в [6]. Ідея даного методу спирається на відомі принципи розділення просторів сигналу та шуму.

Іншим фактором, який об'єднує метод Проні та МПМ, є алгоритм оцінки амплітудних коефіцієнтів, який для них є аналогічним і зводиться до розв'язку перевизначеної системи лінійних алгебраїчних рівнянь з матрицею системи у вигляді прямокутної матриці зі степенями  $z$ -змінних сигналу. Слід зазначити, що більшість зусиль в області методів параметричного спектрального аналізу була прикладена саме до задачі оцінки параметрів частот моделі. Саме тому в даній роботі за ціль було взято покращити якість оцінки амплітудних параметрів і, зокрема, її аргументу (фази), який відіграє важливу роль в радіофізичних вимірюваннях. Особливу увагу приділено можливості покращення якості оцінки комплексних амплітудних коефіцієнтів за рахунок впливу розв'язку амплітудної задачі на оцінку частот сигналу.

## 1.7 Параметричний спектральний аналіз за допомогою ДПФ

У випадку комплексно-експоненціального сигналу метод дискретного перетворення Фур'є (ДПФ) дозволяє також реалізацію параметричного підходу

внаслідок адитивності та відомої форми відповідного зображення для компоненти сигналу [103].

У даному методі спочатку застосовується стандартна реалізація ДПФ і проводиться пошук максимумів амплітудно-частотної характеристики. Оскільки значення та положення піку будуть відповідати істинним амплітуді  $A_k$  та частоті  $f_k$  лише для певних частот, необхідно також провести коригування цих значень. У випадку прямокутного вікна, коли спектральні піки не перекриваються, тобто вони можуть розглядатися як відокремлені, але їхні максимуми не співпадають з значеннями сітки частот (істинний максимум знаходиться між відліками з номерами  $m$  та  $m + 1$ ), відповідні значення частоти та амплітуди оцінюються згідно з

$$f_k = \frac{1}{N\Delta t}(m_k + \lambda_k), \quad A = \frac{|\underline{S}_{m_k}|\pi\lambda_k}{N|\sin \pi\lambda_k|}, \quad (1.8)$$

$$\lambda_k = \frac{\alpha_k}{1 + \alpha_k}, \quad \alpha = \frac{|\underline{S}_{m_{k+1}}|}{|\underline{S}_{m_k}|},$$

де  $\underline{S}_{m_k}$  та  $\underline{S}_{m_{k+1}}$  – сусідні відліки, між якими має розташовуватися істинне положення максимуму піку.

Дані формули дають похибку, що зменшується зі збільшенням кількості відліків  $N$  сигналу. Такі формули дають похибку, яка зменшується зі зростанням  $N$ , зокрема для  $N = 1024$  похибка складає частку відсотка. При цьому варто зазначити, що кількість відліків, яка розглядається для сигналів в даній роботі, є достатньо малою для даного методу. Окрім цього, даний метод підходить лише для випадків сигналів з дійсними значеннями частот, що звужує коло його можливих застосувань, проте підвищує його стійкість до шумів. Застосування такого підходу є повністю неможливим при перекритті сусідніх піків, в тому числі і за рахунок явища Гіббса.

Якщо до даних була застосована вагова функція Ханна, то для оцінки частоти можуть бути використані формули (1.8), але для оцінки  $\lambda_k$  має бути використаний вираз [103]:

$$\lambda_k = \frac{2\alpha_k - 1}{\alpha_k + 1}.$$

Амплітуда спектральної компоненти розраховується згідно з

$$\hat{A} = \frac{2\pi\lambda_k(1 - \lambda_k)}{N|\sin \pi \lambda_k|} (1 + \lambda_k) |\underline{S}_m| \text{ або } \hat{A} = \frac{2\pi\lambda_k(1 - \lambda_k)}{N|\sin \pi \lambda_k|} (\lambda_k - 1) |\underline{S}_{m+1}|.$$

При проведенні оцінки місцезнаходжень та амплітуд спектральних компонент, які розташовані між відліками, що були розраховані за допомогою ДПФ, для довільної форми вагової функції універсальним засобом є застосування параболічної інтерполяції. При цьому вважається, що пік спектральної залежності може бути апроксимований квадратною параболою згідно з формулою [103]:

$$y(\lambda) = |S(\lambda)| = a\lambda^2 + b\lambda + c.$$

На першому етапі потрібно визначити значення модуля спектральної залежності таких відліків, що знаходяться біля максимуму. Нехай  $y(0) = |S(m)|$  відповідає локальному максимуму залежності, а значення  $y(-1) = |S(m-1)|$  та  $y(1) = |S(m+1)|$  визначають відліки, що розташовані перед та після відліку  $S(m)$ , тоді парабола, що проходить через ці точки, має коефіцієнти



$$c = y(0); b = [y(1) - y(-1)]/2; a = [y(1) + y(-1)]/2 - y(0).$$

На підставі розв'язку рівняння  $dy(\lambda)/d\lambda=0$  значення  $\lambda_k$ , що визначає положення максимуму відносно індексу  $m$ , дорівнює значенню

$$\lambda_k = -b/2a. \quad (1.9)$$

Таким чином, якщо в розрахованій залежності  $|S(m)|$  максимум спостерігається для значення  $m$ , то оцінка значення частоти для спектрального піка за інтерпольованими даними складає

$$\hat{f}_m = \frac{1}{N\Delta t}(m + \lambda_k).$$

Амплітуда піку має бути визначена за формулою

$$\hat{A} = y(0) - \frac{b^2}{4a},$$

яка отримана після підстановки в (1.8) значення  $\lambda_k = -b/2a$  згідно з (1.9).

## 1.8 Метод MUSIC

Іншим відомим методом, що використовується для випадків комплексно-експоненціальної моделі сигналу, є метод MUSIC (Multiple Signal Classification). В даному випадку, так само, як і в методі Проні, вважається, що сегмент сигналу номеру  $k$  довжини  $L$ , більшої за порядок сигналу  $M$ , може бути поданий у вигляді

$$\bar{g}_k = [Z]\bar{A}_k + \bar{n}, \quad (1.10)$$

де  $z_{nm} = e^{i\omega_m \Delta t(n-1)}$ ,

$\bar{A}_k$  – вектор комплексних амплітуд сигналу з урахуванням часу початку сегмента ( $A_{k_m} = A_0 e^{i\omega_m \Delta t k}$ ),

$\bar{n}$  – вектор шуму.

Для сигналу типу (1.10) можна записати

$$[R_s] = \langle \bar{g} \bar{g}^H \rangle = [Z][R_A][Z]^H + \sigma^2 [I],$$

де  $[R_A] = \langle \bar{A}_k \bar{A}_k^H \rangle$ ,

$\sigma$  – дисперсія шуму.

Можна показати, що матриця  $[R_A]$  має ранг  $M$ , що дорівнює кількості компонент моделі сигналу.

У випадку, коли відомою є кількість відліків  $N \gg L$ , матрицю  $[R_s]$  можна оцінити за допомогою «технічної» матриці

$$[\widehat{R_s}] = \frac{1}{N - M + 1} [S][S]^H,$$

де  $[S]$  – матриця сигналу, аналогічна тій, що використовується в методі Проні.

Відомо, що ранг матриці, отриманої шляхом множення, не може перевищувати найменшого рангу множника. Таким чином, матриця  $[Z][R_A][Z]^H$  для довільного сигналу матиме ранг  $M$ .

Матриця рангу  $M$  може мати не більше  $M$  ненульових власних чисел. Відповідно,  $[Z][R_A][Z]^H$  має  $L - M$  власних векторів, які належать ядру матриці. Внаслідок структури  $[Z][R_A][Z]^H$  для власних векторів, що належать ядру, можна записати

$$\begin{aligned}
\bar{u}_p^H [Z] [R_A] [Z]^H \bar{u}_p &= \bar{0}, \\
([Z]^H \bar{u}_p)^H [R_A] ([Z]^H \bar{u}_p) &= \bar{0}, \\
[Z]^H \bar{u}_p &= \bar{0}.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Створимо міру  $\rho(\underline{\omega}) = \bar{z}^H(\underline{\omega}) [U] [U]^H \bar{z}(\underline{\omega})$ , де  $[U]$  – матриця, стовпцями якої є власні вектори, що належать ядру  $[Z][R_A][Z]^H$ ,  $\bar{z}(\underline{\omega}) = (1 \quad \dots \quad e^{i\underline{\omega}\Delta t(L-1)})^T$ . Із (1.11) і властивостей однорідних СЛАР можна зробити висновок, що описана міра стає нулем лише у випадку, коли  $\underline{\omega} = \underline{\omega}_m$  [105].

Можна показати, що власні вектори матриці, сконструйованої як  $[A] = [B] + \alpha[I]$ , дорівнюють власним векторам матриці  $[B]$ , а для власних чисел можна записати  $\lambda_{A_m} = \lambda_{B_m} + \alpha$ . Відповідно, власні вектори, отримані із сигналу з шумовою складовою, будуть нести інформацію про дійсне значення циклічної частоти, а значення  $\rho(\underline{\omega})$ , що відповідають цим частотам, становитимуть  $\sigma^2$ .

Залежність  $\frac{1}{\rho(\underline{\omega})}$  називають псевдоспектром даного сигналу і за його піками оцінюють частоти моделі. Для отримання відповідних значень мають бути локалізовані піки залежності та оцінені власне значення частот із застосуванням, наприклад, метода квадратичної інтерполяції, як для випадку застосування ДПФ.

Застосування поняття псевдоспектра не дає можливості отримання оцінок амплітудних коефіцієнтів без використання додаткових алгоритмів. Даний факт вимагає застосування методів оцінки амплітудних коефіцієнтів, аналогічних до тих, що застосовуються для методу Проні та МПМ, які, як відомо, є достатньо вибагливими до точності оцінок частот. При цьому пошук піків псевдоспектру є задачею оптимізації на неперервній множині частот, що вимагає використання значної кількості розрахункового ресурсу для отримання точних оцінок. Зважаючи на те, що даний метод також здатен оцінювати лише обмежену кількість частот, які початково закладаються в модель, його застосування для задач поточного дисертаційного дослідження вважається недоцільним.

## 1.9 Метод Проні

У методі Проні апроксимована функція представляється у вигляді [115]

$$s(t) = \sum_{m=1}^M A_m e^{\lambda_m t}. \quad (1.12)$$

При цьому всі коефіцієнти вважаються дійсними. Для визначення коефіцієнтів початковий сигнал дискретизується як  $s_k = s(t_0 + k\Delta t)$ :

$$s_n = \sum_{m=1}^M A_m e^{\lambda_m n \Delta t}.$$

Оскільки (1.12) має  $2M$  коефіцієнтів ( $M$  амплітуд та  $M$  коефіцієнтів загасання), в своїх розрахунках Гаспар де Проні використовував  $2M$  відліків. В подальших роботах було розвинуто теорію методу Проні для кількості відліків більше  $2M$ . При цьому використовується мінімізація відхилення за методом найменших квадратів як

$$\Delta s = \sum_{k=0}^N |s_k - \hat{s}_k|^2, \quad (1.13)$$

де  $\hat{s}_k$  – оцінка сигналу за методом Проні.

В подальшому, завдяки розвитку комплексного числення, метод Проні було розвинуто для випадку комплексних експоненціальних функцій. В подібному вигляді даний метод підходить для аналізу осцилюючих функцій. Для такого випадку формула моделі методу Проні може бути записана як

$$s(t) = \sum_{m=1}^M \underline{A}_m e^{j\underline{\omega}_m t} = \sum_{m=1}^M \underline{A}_m z_m^t, \quad (1.14)$$

де  $\underline{A}_m$  – комплексні амплітуди,

$\underline{\omega}_m$  – комплексні частоти.

Головною особливістю методу Проні є те, що при розрахунках не проводиться пряма мінімізація (1.13), що є нелінійною задачею. Замість цього використовується той факт, що (1.14) є розв’язком різницевого рівняння [116]

$$\sum_{m=0}^M c_m s_{m+k} = 0. \quad (1.15)$$

Як відомо з теорії різницевого рівнянь, значення  $z_m$  можливо знайти як розв’язки характеристичного поліному різницевого рівняння [117]

$$c_M z^M + c_{M-1} z^{M-1} + \dots + c_0 = 0.$$

При цьому, згідно з (1.15), для знаходження коефіцієнтів  $c_m$  необхідно розв’язати систему

$$\begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_M \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{M+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{N-M} & s_{N-M+1} & \dots & s_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

або

$$[S_{M+1}] \bar{c}_M = \bar{0},$$

де

$$[S_{M+1}] = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_M \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{M+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{N-M} & s_{N-M+1} & \cdots & s_N \end{pmatrix}, \bar{c}_M = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_M \end{pmatrix}.$$

Зазвичай (1.16) подається у вигляді

$$\frac{1}{c_M} \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{M-1} \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_M \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{N-M} & s_{N-M+1} & \cdots & s_{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{M-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_M \\ s_{M+1} \\ \vdots \\ s_N \end{pmatrix}, \quad (1.17)$$

або

$$[S_M] \bar{c}_{M-1} = \bar{s}_{N-M},$$

де

$$[S_M] = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{M-1} \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_M \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{N-M} & s_{N-M+1} & \cdots & s_{N-1} \end{pmatrix}, \bar{c}_{M-1} = \begin{pmatrix} c_0/c_M \\ c_1/c_M \\ \vdots \\ c_{M-1}/c_M \end{pmatrix}, \bar{s}_{N-M} = \begin{pmatrix} s_M \\ s_{M+1} \\ \vdots \\ s_N \end{pmatrix}.$$

При цьому зазвичай робиться припущення  $c_M = 1$ .

Після оцінки коефіцієнтів  $c_m$  і знайдення коренів відповідного характеристичного поліному значення комплексних частот можуть бути розраховані як

$$\underline{\omega}_m = \frac{\ln z_m}{j\Delta t}.$$

Значення  $\underline{A}_m$  можуть тепер бути знайдені шляхом розв'язання СЛАР

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_m \\ z_1^2 & z_2^2 & \cdots & z_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^N & z_2^N & \cdots & z_m^N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{A}_1 \\ \underline{A}_2 \\ \vdots \\ \underline{A}_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_N \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

Потрібно зауважити, що у випадках близькості  $\underline{\omega}_m$  матриця в (1.18) буде близька до виродженої, при наявності значного загасання  $z_k^N$  наближаються до нуля, що утруднює розв'язок такого рівняння і накладає обмеження на підхід.

Для випадків, коли заздалегідь відомо, що сигнал є незгасаючим, кількість точок стандартного методу Проні може бути зменшена завдяки властивостям коефіцієнтів лінійного передбачення.

Можна показати, що коефіцієнти лінійного передбачення  $c_0, \dots, c_M$  для сигналу  $s_n$  є також коефіцієнтами лінійного передбачення для сигналу  $s_{-n}^*$  у випадку відсутності згасання. Таким чином, кількість можливих рядків СЛАР ефективно підвищується [118].

#### 1.10 Методи визначення кількості компонент для моделі суми експонент

Як зазначає Хаусхолдер [119], метод Проні в стандартній формі не пропонує методу для оцінки необхідної кількості компонент розкладання. Важливо зазначити, що навіть якщо сам метод не включає в себе етапу оцінки кількості компонент наближення, структури, що застосовуються в ньому, можуть бути використані для цієї цілі.

Можна показати, що для сигналу довжини  $N$ , який може бути точно відтворений моделлю порядку  $M$ , матриця сигналу вигляду

$$[S_L] = \begin{pmatrix} s_0 & \cdots & s_L \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{N-1-L} & \cdots & s_{N-1} \end{pmatrix}$$

стає виродженою при  $L \geq M$ .

Даний факт пов'язаний з тим, що за визначенням коефіцієнтів лінійного передбачення для будь-яких послідовно розташованих стовпців можна записати

$$\sum_{m=0}^M c_m \bar{s}_{m+k} = 0,$$

де  $\bar{s}_k = (s_k \ \cdots \ s_{k+N-1-M})^T$ , що є визначенням лінійної залежності.

Таким чином, для сигналу без шуму кількість компонент можливо оцінити шляхом розрахунку рангу матриці сигналу. У випадку, коли верхня межа кількості компонент відома заздалегідь, матрицю сигналу можна сформувати саме для цієї кількості, і потім застосувати вже відомі методи розрахунку рангу. Якщо верхня межа є невідомою, можливо застосування поступового збільшення розміру матриці, поки вона не стане виродженою.

Для сигналів із шумом описану вище процедуру застосовувати неможливо. При цьому можливе застосування методів, що базуються на сингулярному розкладанні матриці  $[S_L]$  або розкладанні на власні вектори матриці  $[S_L]^H [S_L]$ . Відомо, що матриця, яка може бути діагоналізована, має кількість ненульових власних чисел, що дорівнює її рангу і, відповідно, – порядку моделі. У випадку, коли шум у сигналі є білим і за умови достатньо великої довжини сигналу, матрицю  $[S_L]^H [S_L]$  можна подати у вигляді

$$[S_L]^H [S_L] = [S_{0L}]^H [S_{0L}] + \sigma^2 (N - M) [I],$$

де  $[S_{0L}]$  – матриця сигналу без шумової складової,

$\sigma^2$  – дисперсія шуму.

Можна показати, що в подібному випадку значення  $\sigma^2 (N - M)$  буде додано до всіх власних чисел матриці. Важливим є проведення дослідження з добору кількості відліків, щоб можна було реалізувати відповідні стратегії. Якщо загальна енергія шуму при цьому буде меншою за енергію корисного сигналу,



власні значення, що розташовані в порядку зменшення, будуть мати різкий спад на межі між тими, що відповідають порядку сигналу і тими, які обернулися б на нуль при відсутності шуму [118]. Варто зауважити, що подібний метод спирається на припущення про те, що шум у сигналі є білим. Дане припущення відповідає дійсності в багатьох випадках, проте не включає у себе такі типи шуму, як імпульсний, який також може виникати в ході багатьох експериментів.

Для випадків, коли неможливо спиратися на припущення про «білість» шумової складової сигналу, доцільно застосовувати метод поступового збільшення порядку моделі та порівняння відхилення результуючого сигналу від вхідного. При цьому не гарантовано, що знайдений оцінений порядок моделі буде дорівнювати дійсному.

### 1.11 Класичні методи розв'язку систем методу Проні

#### 1.11.1 Метод найменших квадратів

Системи (1.17) та (1.18) можуть бути розв'язані за допомогою використання псевдооберненої матриці. Для невиродженої матриці її можливо розрахувати у вигляді [120]

$$[S_M]^+ = ([S_M]^H [S_M])^{-1} [S_M]^H.$$

Відомо [121], що для перевизначеної системи

$$[S_M] \bar{c}_{M-1} = \bar{s}_{N-M}$$

вираз

$$\bar{c}_{M-1} = [S_M]^+ \bar{s}_{N-M}$$

дає оцінку розв'язку за методом найменших квадратів, тобто дає результат пошуку квазірозв'язку.

Розв'язок даної системи рівнянь є розв'язком оберненої задачі, і тому до нього можуть бути застосовані стандартні методи їх аналізу як, наприклад, метод Тихонова [117], який до теперішнього часу є широко розповсюдженим для покращення якості оцінок розв'язків даного класу задач [122].

Для виродженої матриці  $[S_L]$ , псевдообернена матриця може бути отримана на основі її сингулярного розкладання

$$[S_L] = [U][\Lambda][V]^H,$$

де  $[\Lambda]$  – діагональна матриця з елементами  $\lambda_{kk}$ ,

$[U]$ ,  $[V]$  – матриці, стовпці яких є власними векторами матриць  $[S_L][S_L]^H$  та  $[S_L]^H[S_L]$ ,

у вигляді [123]:

$$[S_L]^+ = [V][\Lambda]^+[U]^H,$$

$$\text{де } [\Lambda]_{kk}^+ = \lambda_{kk} = \begin{cases} [\Lambda]_{kk}^{-1}, & [\Lambda]_{kk} > \varepsilon \\ 0, & [\Lambda]_{kk} \leq \varepsilon \end{cases},$$

$\varepsilon$  – порогове значення сингулярних чисел.

Такий підхід забезпечує розв'язок за методом найменших квадратів і одночасно мінімізує норму вектора розв'язку, тобто забезпечує пошук псевдорозв'язку. Саме цей метод зазвичай застосовується в багатьох математичних пакетах, таких як MATLAB [124] і бібліотека NumPy [125], де в якості порогового значення застосовується таке, що відповідає регістровій помилці комп'ютера, що використовується для розрахунків.

Перевищення порядку моделі формує поліном, який має кількість коренів, що перевищує  $M$ . Це викликає необхідність селекції справжніх коренів. Найбільш очевидним є послідовне нарощування порядку моделі і використання

тільки тих коренів, що суттєво впливають на формування залежності, яка є близькою до оброблюваної.

Реалізація методу Проні у варіанті побудови псевдорозв'язку набуло назву методу Кумаресана-Тафтса.

Даний метод був модифікований з використанням ідеї вінеровської фільтрації, яка забезпечує найменшу середньоквадратичну похибку відновлення сигналу [126].

Згідно з означеним підходом діагональні елементи матриці  $[\Lambda]^+$  мають бути сформовані у вигляді [118].

$$\frac{\lambda_{kk}}{\lambda_{kk}^2 + \alpha_k},$$

де

$$\alpha_k = \frac{(N - M)\sigma^2}{(\vec{u}_k^H \hat{\vec{c}}')^2},$$

де  $\hat{\vec{c}}'$  – оцінка вектора коефіцієнтів характеристичного полінома, отримана іншим методом.

### 1.11.2 Метод власного вектора

Іншим відомим методом розв'язання СЛАР методу Проні є метод власного вектора, заснований на відомому факті, що для незашумленого сигналу ранг матриці комплексно-експоненціального сигналу складає  $M - 1$  [127]. Даний метод дозволяє розв'язувати однорідну систему рівнянь напряму та відомий своєю стійкістю до шуму.

При реалізації даного методу за експериментальними даними будується матриця

$$[R] = [S]^H[S],$$

кожен з елементів  $r_{ij}$  якої дорівнює  $\sum_{k=0}^{K-1} s_{k+i-1}^* s_{k+j-1} \approx NR_{ss}(s_{n+i-1}, s_{n+j-1})$ .

При цьому можна побачити, що розв'язок рівняння

$$[R]\bar{c} = \bar{0}$$

є також і розв'язком початкової СЛАР для методу Проні, що також впливає із структури матриці сигналу, яку можна подати у вигляді так званого скелетного розкладання.

Оскільки матриця  $[R]$  є ермітовою, для неї можна знайти набір ортогональних власних векторів та відповідних невід'ємних власних чисел. Власний вектор, для якого відповідне власне число формується тільки шумовою компонентою, може вважатись розв'язком СЛАР. Для доволі довгої послідовності значення даного власного числа, ділене на кількість рядків матриці  $[S]$ , відповідає середній потужності адитивного білого шуму, що існує в сигналі.

Схожа процедура може бути імплементована і на основі сингулярного розкладання власне матриці сигналу. У даному випадку необхідно обирати розв'язок за критерієм найменшого за модулем сингулярного числа. Два підходи можна вважати ефективно еквівалентними. У даній роботі автором застосовувався метод із побудовою матриці  $[R] = [S]^H[S]$ , оскільки він надає можливість швидкої оцінки потужності шумової складової.

Такий метод може бути модифікований на основі ідеї методу MUSIC. В цьому випадку вектор коефіцієнтів характеристичного полінома  $\bar{c}$  формується за правилом

$$\bar{c} = \bar{v}_{M+1} + \bar{v}_{M+2} + \dots \bar{v}_L$$

за умови нормування всіх власних векторів  $\bar{v}_{M+i}$  так, щоб коефіцієнт, який відповідає старшому степеню, дорівнював одиниці. Всі означені методи для низки прикладів не продемонстрували переваг перед методом власного вектора [118]. Такий підхід не дав переваг і в методі дробово-раціональної апроксимації при формування коефіцієнтів характеристичного полінома [128].

Метод власного вектора у більшості випадків демонструє переваги перед іншими методами, які базуються на методі найменших квадратів, включаючи алгоритм фільтра Калмана [118]. Це обумовлено тим, що отримання значень коефіцієнтів характеристичного полінома за методом найменших квадратів внаслідок нелінійного зв'язку із значеннями частот не забезпечує зменшення похибки оцінювання цих частот. Використання міри у вигляді мінімуму інтервалу тривалості є перспективним, але обчислювальна процедура суттєво ускладнюється за рахунок суттєвих обчислювальних витрат.

### 1.12 Метод пучка матриць

Логічним продовженням методу Проні є метод пучка матриць. МПМ є перспективним для розгляду як метод аналізу результатів радарного сканування, оскільки відомо, що він здатен надавати високоякісні результати для широкополосного сканування у хвильових структурах [129]. Даний метод також працює на основі подання сигналу у вигляді суми комплексно-експоненціальних функцій [130], [131].

Лінійним пучком даних матриць називається структура  $[p(\lambda)] = [S_1] - \lambda[S_2]$ . Основною ідеєю МПМ є побудова лінійного пучка на основі двох матриць сигналу. При цьому перша матриця будується на основі сигналу без першого відліку, а друга – без останнього, як

$$[S_1] = \begin{bmatrix} S_1 & \cdots & S_L \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{N-L} & \cdots & S_N \end{bmatrix}, \quad [S_2] = \begin{bmatrix} S_0 & \cdots & S_L \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{N-L-1} & \cdots & S_N \end{bmatrix}.$$

За допомогою скелетного розкладання можна показати, що аналіз даного пучка матриць дозволяє оцінювати значення  $z_m$  для сигналу.

Подамо  $[S_1]$  та  $[S_2]$  як

$$[S_1] = [Z_1][A][Z_0][Z_2]^T,$$

$$[S_2] = [Z_1][A][Z_2]^T,$$

де

$$[Z_1] = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & \cdots & z_M \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{N-L-1} & \cdots & z_M^{N-L-1} \end{pmatrix},$$

$$[Z_2] = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & \cdots & z_M \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{N-L-1} & \cdots & z_M^{N-L-1} \end{pmatrix},$$

$$[Z_0] = \begin{pmatrix} z_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & z_M \end{pmatrix},$$

$$[A] = \begin{pmatrix} \underline{A}_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \underline{A}_M \end{pmatrix}.$$

Як можна побачити, пучок матриць в даному випадку можна також подати як  $[Z_1][A]\{[Z_0] - \lambda[I]\}[Z_2]$ , із чого випливає, що ранг  $[p(\lambda)]$  знижується за умови  $\lambda = z_m$ .

Для випадку сигналу без шуму ненульовими будуть лише значення  $z_m$ , що відповідають істинним. Для шумливого сигналу при цьому необхідно застосування додаткових алгоритмів для відсіювання хибних значень.

### 1.13 Проблема сигналів з пропущеними даними

Проблема аналізу сигналів з пропущеними даними є широко розповсюдженою в теорії керування. У [132] дану проблему було розглянуто в аспекті, що відповідає ідеї методу Проні. В поточній роботі демонструється, що шляхом розширення матриці сигналу до вигляду, в якому кількість непропущених даних в кожному зі стовпців матриці сигналу є відповідною порядку моделі лінійного передбачення, задача може бути розбита на декілька, що дають немінімальне подання у вигляді характеристичних поліномів. Зважаючи на відомий зв'язок між кількістю лінійно незалежних поліноміальних рівнянь та мінімальної кількості їх унікальних коренів, можна показати, що спільні корені відповідно побудованих характеристичних поліномів є  $z$ -параметрами сигналу.

Даний метод має декілька особливостей, що роблять перспективним пошук альтернативних методів для розв'язання цієї задачі. Наприклад, описаний метод вимагає застосування структури аналізу, що є аналогічною до методу Проні, але не дозволяє його прямого застосування для, наприклад, МПМ. Також імплементація даного методу вимагає реалізації алгоритму перевірки чисел із плаваючою комою на рівність, що є складною задачею, яка вимагає певних компромісів або алгоритму пошуку найбільшого спільного дільника декількох поліномів, який вимагає застосування бібліотек символічної алгебри. Іншим аспектом даного методу є необхідність побудови декількох підматриць сигналу з урахуванням необхідної кількості компонент в стовпцях.

Загалом, розгляд даного підходу призводить до актуальності дослідження інших підходів до аналізу сигналів із пропущеними даними, зокрема – таких, які можуть бути застосовані для МПМ, який вважається логічним продовженням методу Проні.

### 1.14 Висновки

1. Модель у вигляді суми зважених експонент з комплексними показниками є адекватною для опису частотної залежності коефіцієнта відбиття шаруватих структур, системи відбивачів, задачі вимірювання переміщення, зокрема вібрацій.
2. Застосування засобів вимірювань на основі принципів інтерферометрії і голографії зберігає адекватність моделі у вигляді суми зважених експонент з комплексними показниками.
3. Для підвищення розрізнявальної здатності вздовж осі зондування доцільним є застосування параметричного цифрового спектрального аналізу, зокрема методу Проні та методу пучка матриць, які, на відміну від інших багатьох методів цифрового спектрального аналізу, що дають форму спектральної густини, надають точні оцінки показників експонент.
4. Методи Проні та пучка матриць мають переваги над непараметричними методами, зокрема методом дискретного перетворення Фур'є, такі, як відсутність необхідності інформації в межах цілої кількості періодів, виконання віконної обробки.
5. При створенні алгоритмів реалізації методів Проні і пучка матриць було враховано наявність білого шуму, відомі алгоритми мають високу якість придушення білого шуму. Наявність імпульсного шуму суттєво спотворює оцінки параметрів і потребує розвитку нових методів подолання впливу саме імпульсного шуму.
6. Застосування методу інверсного синтезування апертури з використанням калібрування на результати сканування провідної смужки натикається на експериментальні труднощі забезпечення високої точності додержання паралельності площин сканування і апертури, особливо у міліметровому діапазоні довжин хвиль. Для уникнення такого сорту спотворень дослідження технології синтезування в такий спосіб доцільно проводити шляхом чисельного моделювання.



7. Метод допоміжних джерел для моделювання відбиття і розсіяння у вільному просторі є перспективним засобом у порівнянні з методом скінченних елементів, який покладено в основу стандартних солверів електродинамічних задач, оскільки наявність відносно великої відстані між випромінювачем і об'єктом дослідження потребує великої кількості елементів, вибору місця розташування поглинальних стінок. Для більш складних геометрій потрібне застосування адаптивного підходу до добору розмірів елементів.
8. Аналіз наявності в експериментальних даних імпульсних завад доцільно проводити на основі міри мінімальної тривалості. Використання такої міри для побудови цільової функції з подальшою її мінімізацією потребує доволі високих обчислювальних ресурсів, не існує стандартизованих підходів щодо мінімізації такої цільової функції, на відміну від методу найменших квадратів. Така міра є доцільною при порівнянні сигналів, відновлених за отриманими оцінками параметрів, і сигналів, що отримані експериментально і містять імпульсні завади.
9. Для розробки алгоритмів, стійких до імпульсних шумів, що формуються в аналого-цифровому перетворювачі, необхідним є проведення досліджень на основі сучасних пакетів моделювання роботи АЦП.
10. Мають бути опрацьовані засоби виявлення викидів в даних.
11. З метою проведення комп'ютерного експерименту для верифікації застосовності методів спектрального параметричного аналізу до результатів багаточастотного радарного сканування доцільно застосувати метод допоміжних джерел, оскільки він надає можливість проводити симуляцію за достатньо короткий час на персональному комп'ютері навіть для складних структур.
12. Розвиток методів багатозондового вимірювання комплексного коефіцієнту відбиття може бути здійснений на основі параметричних методів цифрового спектрального аналізу. Викривлення значень довжини хвилі у хвилеводі, відхилення в місті розміщення зондів, похибки в налаштуванні частоти сигналу потребують створення алгоритмів коригування комплексної частоти при оцінці комплексної амплітуди.

## РОЗДІЛ 2 РОЗВИТОК ІСНУЮЧИХ МЕТОДІВ ТА АЛГОРИТМІВ

### 2.1 Апаратне та програмне забезпечення

Для забезпечення максимальної адаптивності процесу дослідження всі розрахунки були проведені на персональному комп'ютері. При цьому в якості основного середовища розробки було обрано Python 3.12 з комплектом класичних математичних бібліотек, що вплинуло на перелік алгоритмів, що використовувалися під час розрахунків.

Методи параметричного спектрального аналізу, освітлені в даній роботі, потребують широкого застосування лінійної алгебри, що під час дослідження було забезпечено за допомогою таких бібліотек, як `numpy.linalg` [133] та `scipy.linalg` [134].

Для розв'язання задачі пошуку власних векторів та власних чисел в роботі в основному застосовувалась функція `scipy.linalg.eig` [135], яка використовує функцію `_geev` з бібліотеки LAPACK для розрахунків.

Для реалізації методу Проні важливим є алгоритм розв'язання поліноміальних рівнянь високих порядків. Для цього було застосовано функції `numpy.roots` та `numpy.polynomial.polynomial.Polynomial.roots` [136]. Дані функції застосовують метод матриці-компаньйона для розрахунку коренів.

З метою покращення швидкості розрахунку у випадках, де паралелізація розрахунків була можливою, застосовувалась стандартна бібліотека `multiprocessing`.

При розв'язуванні систем лінійних алгебраїчних рівнянь в ході даної роботи використовувалися методи псевдооберненої матриці Мура-Пенроуза і метод власних векторів. Розрахунок псевдооберненої матриці проводився за допомогою функції `scipy.linalg.pinv`, а розрахунок власних векторів та чисел – за допомогою функції `scipy.linalg.eig`.

Для генерації білого шуму використовувалась функція `numpy.random.normal`. При цьому розподіл шуму відповідав Гауссівському, що є доцільним для моделювання теплового шуму.

## 2.2 Алгоритм МПМ

У даній роботі було використано реалізацію МПМ, описану в [6], яка спирається на застосування сингулярного розкладання повної матриці сигналу  $[S]$  як  $[S] = [U][\Sigma][V]^H$ . Дану операцію в ході дисертаційного дослідження було проведено за допомогою функції `numpy.linalg.svd`.

Можна показати, що значення  $z_m$  містяться серед власних чисел матриці  $[V_2]^{H+}[V_1]^H$ . При цьому отримані значення будуть містити і хибні додаткові оцінки, які мають бути ідентифіковані та усунені. Дана проблема може бути подолана шляхом розділення простору на підпростір сигналу та підпростір шуму.

У даному випадку, на відміну від методів таких, як MUSIC, сингулярні вектори, що утворюють підпростір шуму, відкидаються, і залишаються лише  $M$  сингулярних векторів, для яких абсолютні значення сингулярних чисел є найбільшими. Оскільки матриці  $[S_1]$  та  $[S_2]$  можуть бути отримані шляхом відкидання від повної матриці сигналу першого та останнього стовпця відповідно, вони можуть бути апроксимовані як  $[S_1] = [U'][\Sigma'][V_1']^H$ ,  $[S_2] = [U'][\Sigma'][V_2']^H$ , де штрихом показані компоненти сингулярного розкладу, усічені до  $M$  сингулярних векторів та чисел. При цьому  $[V_1']$  та  $[V_2']$  мають всі рядки окрім першого та останнього відповідно. Значення власних чисел матриці  $[V_2']^{H+}[V_1']^H$  при цьому власні числа, що раніше відповідали шумовим збуренням перетворюються на нулі. Обчислення даних «зайвих» розв'язків є неефективним. При цьому можна показати, що значення власних чисел  $[V_2']^{H+}[V_1']$  є комплексно спряженими до ненульових власних чисел  $[V_2']^{H+}[V_1']^H$  [6]. Даний підхід і було реалізовано в поточній роботі.

### 2.3 Алгоритм методу допоміжних джерел

В ході роботи для реалізації методу допоміжних джерел на основі відомого методу було розроблено програмний комплекс MASSPECS (Method of Auxiliary Sources Solver for Perfectly Electrically Conductive Structures), в який входила можливість створення двовимірних структур із ідеально провідного матеріалу та розв'язання задачі оцінки магнітуди та фази електромагнітного поля, на який було отримане авторське право [137].

При цьому відповідно до методу з модифікованою функцією Ганкеля, поле кожного з «дротів» розраховувалось як

$$RH(z) = \begin{cases} J_0 - 1.74j, & |z| = 0, \\ J_0(z) + \Im \left\{ 4.74e^{j\pi\frac{190}{180}} \frac{H_0^{(1)}(z)}{\ln(0.015z)} - 0.23j \right\}, & |z| \in (0; 2] \\ H_0^{(1)}(z), & |z| > 2, \end{cases}$$

де  $J_0(z)$  – функція Бесселя,

$H_0^{(1)}(z)$  – функція Ганкеля.

Для кожного із положень «дротів» застосовувався принцип відсутності тангенціальної електричної складової на поверхні, тобто

$$\sum_m \underline{A}_m RH(\rho_{mn}) + \underline{A}_s H(\rho_{sn}) = 0, \quad (2.1)$$

де  $\rho_{mn}$  – відстань між «дротами»  $m$  і  $n$ ,

$\rho_{sn}$  – відстань між джерелом та «дротом»  $n$ ,

$\underline{A}_m$  – комплексна амплітуда для «дроту»  $n$ ,

$\underline{A}_s$  – комплексна амплітуда джерела.

На основі (2.1) будується СЛАР

$$\begin{bmatrix} RH(\rho_{11}) & \cdots & RH(\rho_{M1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ RH(\rho_{1M}) & \cdots & RH(\rho_{MM}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A}_1 \\ \vdots \\ \underline{A}_M \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} H(\rho_{s1}) \\ \vdots \\ H(\rho_{sM}) \end{bmatrix},$$

яка розв'язується за допомогою стандартних бібліотечних функцій. В даній дисертаційній роботі ці розрахунки проводились за допомогою `numpy.linalg.solve`.

У випадках, коли структура складається з декількох елементів, що торкаються або перетинаються, накладання або близьке розташування «дротів» може призвести до поганої обумовленості системи. З метою покращення результатів до розрахункового процесу входила фаза препроцесингу, під час якого перевірялись відстані між близькими «дротами» та видалялись ті, що знаходились надто близько до інших.

Перевагою методу допоміжних джерел є те, що після отримання розв'язку обчислення поля за допомогою виразу

$$E(x, y) = \sum_m \underline{A}_m RH(\rho_m) + \underline{A}_s H(\rho_s),$$

де  $\rho_m = \sqrt{(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2}$ ,

$$\rho_s = \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2},$$

можливо в будь-якій точці за виключенням точки розташування джерела без необхідності проведення вибагливих розрахунків. Обчислення даного типу під час дисертаційного дослідження проводилися зокрема за допомогою методів векторизації розрахунків, яку надає бібліотека NumPy.

Результати розрахунків у вигляді комплексних амплітуд та положень основного та допоміжних джерел зберігались для подальшого використання.

Лістинг алгоритму можна побачити в додатку Б.

## 2.4 Генерація імпульсного шуму

Для перевірки поведінки методів в присутності білого шуму було розроблено авторський генератор. Нехай необхідно згенерувати послідовність імпульсного шуму з ймовірністю шумового піку в точці  $p$  та математичним сподіванням висоти імпульсу  $\mu$ . При цьому подібний імпульс може мати будь-який знак з рівною ймовірністю, і його значення задається як випадкова величина з нормальним розподілом.

Для генерації можна застосувати наступний алгоритм (додаток В):

- 1) для кожної комірки масиву генеруємо рівномірно розподілене випадкове значення;
- 2) кожне значення менше за  $1 - 2p$  заміняємо на 0, значення в межах  $[1 - 2p; 1 - p)$  – на 1, а в межах  $[1 - p; 1]$  – на  $-1$ ;
- 3) кожне ненульове значення множимо на випадкову величину, згенеровану вбудованими методами.

Приклад результату генерації імпульсного шуму даним методом можна побачити на рис. 2.1.

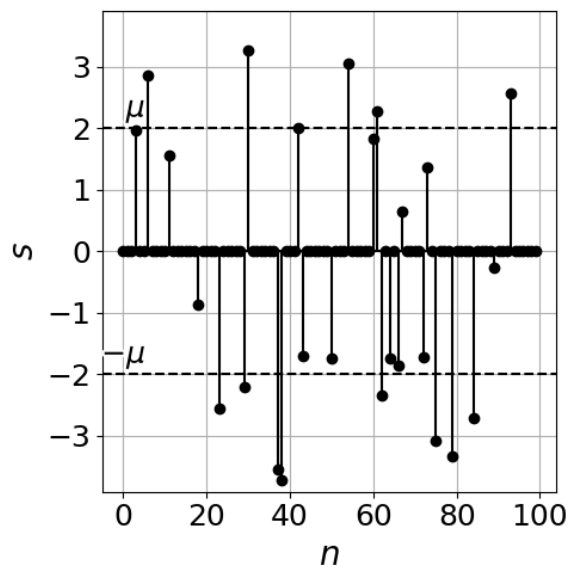


Рис. 2.1. Результат генерації імпульсного шуму з  $p = 0.25$ ,  $\mu = 2$ ,  $\sigma = 1$

Важливо зазначити, що значення  $p$  має бути достатньо низьким, оскільки за  $p = 1$  даний метод генерує звичайний Гауссівський білий шум. В роботах автора, включаючи дану дисертаційну, основне значення  $p$  було обрано на рівні 0.05, що відповідає очікуваному при нормальній роботі сучасних вимірювальних систем.

## 2.5 Сортування результуючих оцінок параметрів

Відомо, що МПМ та більшість інших параметричних методів спектрального аналізу видають пари значень комплексної частоти та амплітуди в непередбачуваному порядку. Даний факт призводить до складності оцінки точності їх відтворення, оскільки вони мають бути відсортовані у порядку, аналогічному до заданого.

Для сортування параметрів відповідно до початкового порядку було розроблено алгоритм, що діє за наступним принципом (додаток Г):

- 1) збирається матриця, у якій кожне значення відповідає модулю різниці значення параметра та значення темплейту з номерами, що відповідають рядку та стовпцю;
- 2) проводиться пошук комірки з найменшим значенням відхилення і за номерами рядку та стовпця отримане значення параметра ставиться у відповідність до значення темплейту;
- 3) рядок та стовпець виймаються із розрахунку шляхом заміни значень на NaN;
- 4) крок 2 повторюється до повного виснаження матриці.

Даний алгоритм є менш точним, ніж перебір всіх можливих комбінацій, проте є значно швидшим при роботі та відповідає алгоритму, який застосовується дослідником при ручному порівнянні результатів.

## 2.6 Сегментний підхід до аналізу сигналу

З метою боротьби з імпульсним шумом автором було запропоновано застосування відомого методу сегментації сигналу, ефективність якого раніше було показано в [118]. В [138] було продемонстровано, що застосування методу Проні на коротких сегментах загальної послідовності дозволяє досліджувати сигнали зі змінними частотами. Даний факт є важливим оскільки наявність білого шуму може призводити до ефектів, що нагадують фазову модуляцію. Даний метод може бути застосований для покращення роботи будь-якого зі стандартних підходів, таких, як метод Проні або метод пучка матриць. В [80] та [139] автором було продемонстровано, що застосування підходу сегментування для методу Проні дозволяє отримувати результати кращої якості в умовах імпульсного шуму, особливо для значень комплексної амплітуди, проте вимагає ретельного підбору типу усереднення та вагового параметру.

Головною ідеєю даного підходу є розділення сигналу  $s_n$  на сегменти типу

$$\bar{s}_k = [s_{k\Delta n} \quad \cdots \quad s_{k\Delta n + K - 1}]^T,$$

які можуть перекриватись. У випадку коли останній сегмент не міг мати відповідної довжини він відкидався у випадку надто короткої послідовності для обробки. Якщо скорочена послідовність була достатньо довгою для повноцінної обробки скорочений сегмент використовувався для аналізу. Слід зазначити, що для сигналів із загасанням використання або невикористання останнього сегменту не призводить до значних змін в результаті оскільки його SNR є найменшим. Оптимальний ступінь перекривання сегментів та їх довжина значним чином залежать від якості та типу вхідного сигналу, внаслідок чого найбільш практичним підходом до їх оцінки є стохастичний комп'ютерний експеримент.

В ході дисертаційного дослідження дане значення було оцінене за допомогою методу детермінованого локального пошуку. У кожній точці сфери



навколо поточного вектору параметрів проводилось 1000 реалізацій шуму. Після цього наступна точка обиралась за медіанним значенням середньоквадратичного відхилення сигналу. Комбінації параметрів, що відповідають хибній роботі методу автоматично відкидались без проведення розрахунків.

Після проведення сегментування стандартний метод застосовується для кожного сегмента окремо повністю або до певного кроку, після якого результати розрахунків об'єднуються. Алгоритм об'єднання результатів при цьому базується на оцінці «якості» кожного з сегментів, наприклад – на значенні їх SNR або на точності відтворення сигналу методами параметричного спектрального аналізу для кожного окремого сегмента.

У випадку оцінки за допомогою SNR його значення може бути оцінене як

$$\text{SNR} = \frac{\sigma_N^2}{P - \sigma_N^2},$$

$$P = \frac{1}{L} \sum_{n=n_0}^{n_0+L-1} |s|_n^2,$$

де  $P$  – оцінка середньої потужності сегменту,

$n_0$  – початковий індекс сегменту,

$\sigma_N^2$  – оцінка дисперсії білого шуму.

Для оцінки дисперсії білого шуму був застосований метод, заснований на пошуку власних чисел матриці  $[S]^H[S]$  та виборі найменшого власного числа як

$$\sigma_N^2 = \frac{\min_i \lambda_i}{L - M},$$

де  $\lambda_i$  – власні числа матриці  $[S]^H[S]$  для сегменту,

$L$  – довжина сегменту,

$M$  – порядок моделі.

В роботах автора було реалізовано та розглянуто імплементацію сегментованого методу Проні з оцінкою кінцевих значень на етапі пошуку коефіцієнтів лінійного передбачення, етапі пошуку коренів характеристичного полінома, етапі пошуку комплексних частот, та на етапі отримання кінцевого результату. У випадку метода пучка матриць було реалізовано як достатньо просту реалізацію на етапі пошуку комплексних частот та на етапі отримання кінцевого результату, так і алгоритм на основі аналізу коефіцієнтів лінійного передбачення та відповідного характеристичного полінома шляхом пошуку коефіцієнтів поліному за його коренями на основі теореми Вієта для поліномів вищих порядків.

У минулих та поточній роботі в якості визначення зваженого медіанного значення було взято подане в [140] як

$$x_k: \begin{cases} \sum_{x_i < x_k} w_i < \frac{1}{2}, \\ \sum_{x_i > x_k} w_i \leq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

де  $w_i$  – ваговий коефіцієнт, що відповідає значенню  $x_i$ . Дана реалізація зваженого медіанного значення була реалізована за допомогою стандартних функцій мови Python.

## 2.7 Препроцесинг сигналу, отриманого з АЦП

У випадку вимірювання на реальній апаратурі сигнал може набувати певних викривлень, до яких входять перекіс характеристики та модуляції її осцилюючої складової. В роботі було розглянуто можливість придушення даних викривлень для сигналу для відбиття від однієї неоднорідності.

З метою виправлення перекосу сигналу було застосовано вбудовану функцію `scipy.stats.linregress`, яка обчислює оптимальну в сенсі найменших квадратів лінійну апроксимацію для вихідної послідовності [141]. Отримана апроксиманта була поточною віднята від результату симуляції. Дана операція була обрана замість більш класичного підходу застосування подвійного різницевого фільтра з метою збереження амплітудної характеристики осцилюючої частини вихідного сигналу.

Оскільки ідеальний сигнал для випадку однієї неоднорідності являє собою суму сталої та моночастотної гармонічної складової (або лише гармонічної після попереднього кроку), амплітуда його коливань має бути сталою. Відповідно, будь-яка модуляція сигналу повинна бути частиною викривлень і має бути усунена. В дисертаційній роботі для цього було вирішено застосувати факт того, що модуль аналітичного сигналу, що визначається як [142]

$$s_a(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\underline{S}(\omega)\underline{H}(\omega)\},$$

$$\text{де } \underline{H}(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < 0, \\ 1, & \omega = 0, \\ 2, & \omega > 0, \end{cases}$$

$\underline{S}(\omega)$  – Фур'є-зображення вихідного сигналу,

$\mathcal{F}^{-1}$  – оператор оберненого перетворення Фур'є,

для певної амплітудно-модульованої гармонічної функції є її обвідною.

Для обчислення аналітичного сигналу було застосовано стандартну функцію `scipy.signal.hilbert`, яка обчислює аналітичний сигнал за допомогою ДПФ [143]. Значення вихідного сигналу після цього поточною ділилося на значення обвідної для отримання кінцевого результату.

Результуючий сигнал після препроцесингу потім було оброблено за допомогою методів параметричного спектрального аналізу.

## 2.8 Моделювання діодного детектора та відповідного АЦП

Для перевірки описаного вище методу виникла необхідність створення комп'ютерної моделі відповідної вимірювальної системи. З цією метою було застосовано комбінований комплекс у вигляді головної програми на мові Python 3.12 та програмного забезпечення Ngspice [144], яке дозволяє проводити симуляцію електронних кіл на основі списку з'єднань. В якості симульованого апаратного забезпечення було обрано радіочастотний детектор на основі діоду BAT68 [145] та мікроконтролеру серії PIC16F88x [146] (рис. 2.2).

Сигнал на вході системи було згенеровано на основі математичної моделі прямокутного хвильоводу з неоднорідністю. В якості падаючої хвилі в даному випадку застосовувався лінійний чірп в межах від 38 ГГц до 52 ГГц з довжиною розгортки в 8 нс аналогічно до реальних подібних установок [61] (додаток Д).

Оскільки ключ цифро-аналогового перетворювача відкривається на дуже короткий час в порівнянні з загальною довжиною сигналу, для економії місця на жорсткому диску та часу розрахунку вхідний сигнал було сегментовано з урахуванням часу відкриття ключа та необхідного буферу до та після цього для зменшення ефектів стрибкоподібної зміни амплітуди сигналу (рис. 2.3).

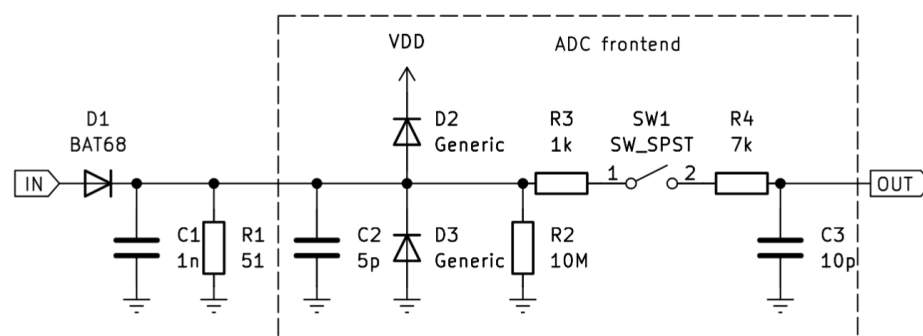


Рис. 2.2. Схема електронної моделі вимірювального фронтенду, яка застосовувалась під час комп'ютерного експерименту

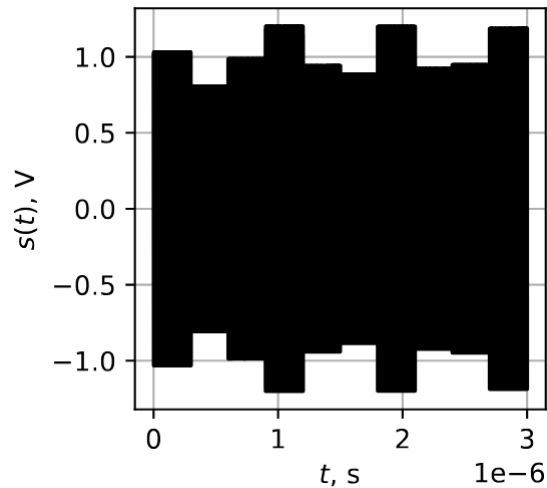


Рис. 2.3. Приклад сигналу, який було згенеровано в ході комп'ютерного експерименту

Результат обробки сигналу за допомогою моделі фронтенду було далі оброблено за допомогою моделі ідеального цифрово-аналогового перетворювача для отримання вихідного сигналу для аналізу (рис. 2.4).

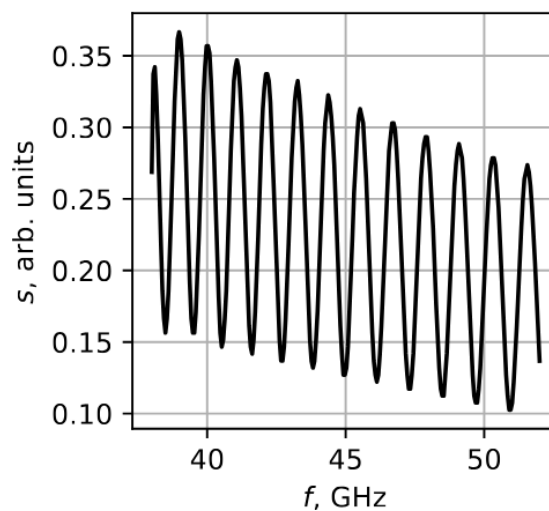


Рис. 2.4. Залежність виміряної потужності сигналу від частоти генератора

## 2.9 Вибір типу методу Проні

На початку роботи було проведено експеримент для коректного вибору підходу до методу Проні, який є найбільш доцільним для задачі аналізу сигнальних послідовностей. При цьому розглядалися в основному два методи:

метод псевдоінверсії Кумаресана-Тафтса та метод власного вектору. Для цього було згенеровано сигнальні послідовності вигляду  $s_n = \cos(2\pi f n \Delta t + \varphi) + n_n$ , де  $f$  – випадкове значення частоти,  $\varphi$  – випадкове значення початкової фази, а  $n_n$  – білий шум із Гауссівським розподілом. Кількість точок в сигналі змінювалась від 8 до 500, і для кожної кількості проводилось по 1000 випробувань. Як можна побачити на рис. 2.5, метод власного вектора здатен надавати кращу оцінку сигналу для значно ширшого діапазону кількостей точок в ньому. Таким чином, саме цей підхід використовувався у подальшому за винятків випадків, де структура даного методу унеможливлювала застосування додаткових алгоритмів.

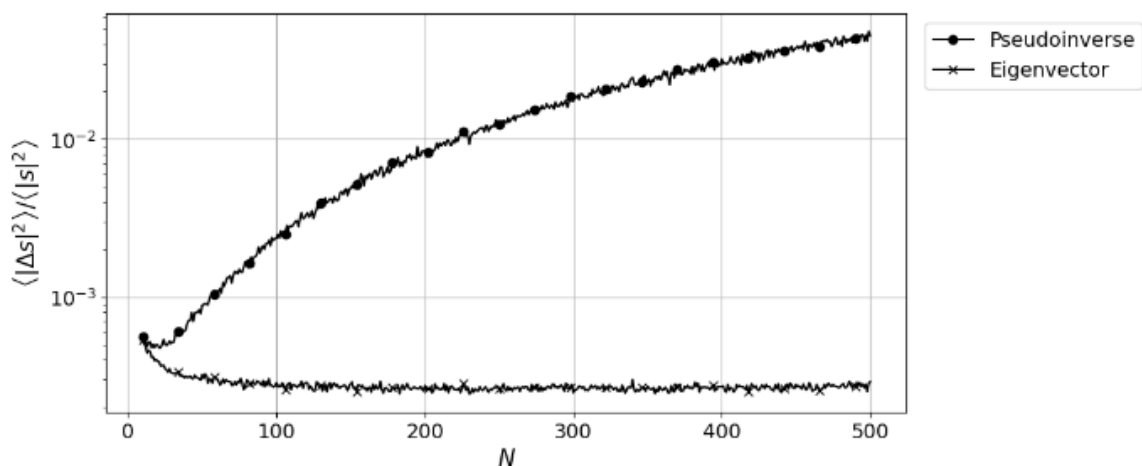


Рис. 2.5. Залежність точності апроксимації форми сигналу від кількості точок в ньому за допомогою методу Проні

Після вибору методу власного вектора як доцільного для застосування для подальшого аналізу було вирішено провести випробування залежності його точності для сигналу на різних частотах. Для цього було проведено комп'ютерний експеримент в ході якого було побудовано залежність середньої потужності відхилення відтвореного моночастотного сигналу від ідеального нешумливого від нормованої частоти в межах від 0.01 до 0.49 з кроком 0.01 для того, щоб охопити якомога більший діапазон значень. Як можна побачити на

рис. 2.6, найкраща точність відтворення сигналу досягається на частотах біля центральної, що відповідає теоретичним висновкам [147].

Після цього було протестовано залежність точності відтворення від частоти для двочастотного сигналу. При цьому задавалися значення центральної частоти та відстані між нормованими частотами компонент.

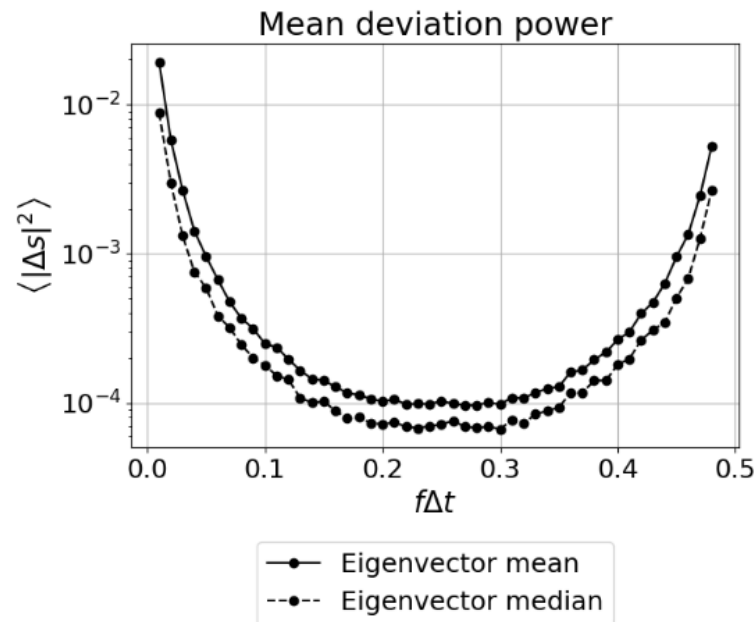


Рис. 2.6. Залежність точності відтворення сигналу

Як можна побачити на рис. 2.7, для сигналу з декількома компонентами найкраща оцінка відповідає помірній відстані між компонентами (від 0.1 до 0.3) та близькості середнього значення до 0.25.

Слід зазначити, що якість відтворення на всіх частотах стає гіршою при малій відстані між частотами. Даний факт пояснюється тим, що внаслідок наявності шуму та реєстрових помилок при розрахунку подібний сигнал може здаватись одночастотним, що призводить до невідповідності моделі та можливим розбіжним розв'язкам.

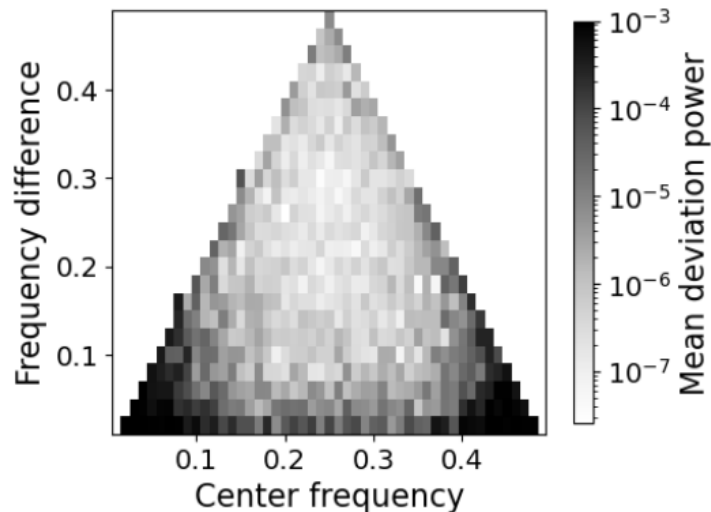


Рис. 2.7. Залежність точності відтворення методом Проні від частоти для двочастотного сигналу

#### 2.10 Підбір мінімальної кількості відліків сигналу для проявлення характеристик білого шуму

Методи спектрального аналізу, що розглядаються в даній роботі, першочергово призначені для аналізу сигналу в умовах білого шуму. Однією з його основних характеристик є діагональність автоковаріаційної матриці. Дана характеристика сигналу починає проявлятися лише при наявності достатньої кількості відліків. Внаслідок цього перед початком експериментів було проведено випробування для оцінки залежності середньої оцінки діагональності матриці автоковаріації від кількості точок сигналу.

Для даного випадку в якості подібної оцінки можливо адаптувати коефіцієнт Пірсона [148]. При цьому кожен з елементів матриці ділиться на суму всіх елементів для отримання проміжної матриці

$$r'_{ij} = \frac{|r_{ij}|}{\sum_{ij} |r_{ij}|},$$

де  $r_{ij}$  є елементом матриці  $[R] = [S]^H[S]$ .



Оскільки значення матриці  $[R']$ , складеної з елементів  $r'_{ij}$  не можуть бути від'ємними і в сумі дорівнюють 1, дану матрицю можна вважати матрицею розподілу ймовірностей об'єднаних випадкових процесів вибору рядка та стовпця. Для такого процесу коефіцієнт Пірсона розраховується як

$$\rho = \frac{\vec{r}^T[A]\vec{r} - \vec{r}^T[A]\vec{i}^T[A]\vec{r}}{\sqrt{\vec{r}_2[A]\vec{i}^T - (\vec{r}[A]\vec{i}^T)^2}\sqrt{\vec{i}[A]\vec{r}_2^T - (\vec{i}[A]\vec{r}^T)^2}},$$

де  $\vec{r} = [1 \ 2 \ \dots \ M]^T$ ,  $\vec{r} = [1 \ 4 \ \dots \ M^2]^T$ ,  $\vec{i} = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$ .

Результат випробувань для моделей різного порядку можна побачити на рис. 2.8.

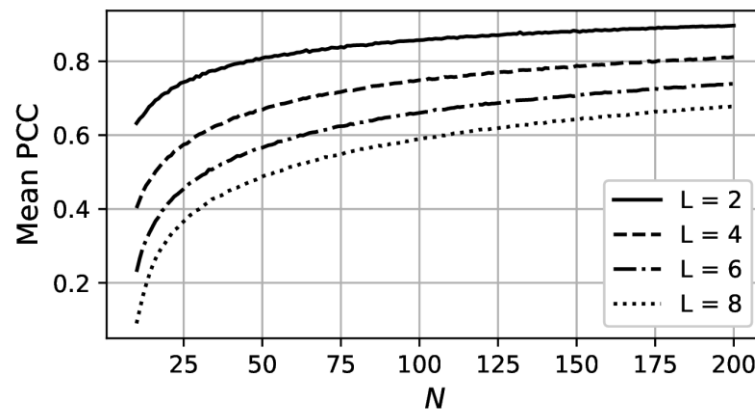


Рис. 2.8. Залежність середньої діагональності матриці автоковаріації від кількості відліків в сигналі

Як можна побачити, за значень  $N$  більших за 75 точок покращення якості генерованого шумового сигналу стає повільним. Внаслідок цього для економії комп'ютерних ресурсів в більшості випадків (окрім тих, де це явно написано) кількість точок в послідовності становила 100 точок.

## 2.11 Висновки

1. Було запропоновано перелік існуючих інструментів, які дозволяють ефективно проводити розрахунки для задач параметричного спектрального аналізу.
2. Було запропоновано застосування існуючого вискоефективного алгоритму для реалізації МПМ, що забезпечує відкидання паразитних значень полюсів на основі даних із сучасної літератури.
3. Було побудовано програмний комплекс для реалізації методу допоміжних джерел із застосуванням регуляризованих функцій Ганкеля на мові Python 3.12 із включенням додаткових алгоритмів для покращення якості результатів.
4. Стандартні функції бібліотеки `numpy.random` дозволяють генерувати імпульсний шум. В ході роботи було створено та випробувано подібний алгоритм.
5. Порівняння якості обробки методами параметричного спектрального аналізу потребує автоматичного сортування пар частота-амплітуда. В ході роботи було реалізовано подібний алгоритм, який відповідає балансу між точністю та швидкодією.
6. Метод сегментації сигналу дозволяє покращити характеристики параметричних методів спектрального аналізу в умовах імпульсного шуму або змінного SNR. При цьому метод потребує подальшого дослідження та розвитку, які розглядаються в даній роботі.
7. Метод власного вектору є найбільш доцільним для використання із стандартних для розв'язку задачі методу Проні. Даний підхід було реалізовано як основу для всіх подальших розрахунків.
8. Кількість точок послідовності, достатня для стабілізації стохастичних характеристик білого шуму, складає 100 точок. Дане значення було в подальшому застосовано як мінімальну кількість точок послідовності в стохастичних експериментах.

## РОЗДІЛ 3 ЗАПРОПОНОВАНІ НОВІТНІ МЕТОДИ ТА АЛГОРИТМИ

### 3.1 Метод пропускання точок

#### 3.1.1 Метод Проні

У якості подальшого розвитку метода сегментування сигналу було розглянуто метод відкидання точок. Даний підхід засновується на тому, що зазвичай СЛАР методу Проні є значно перевизначеною. Це призводить до того, що певну кількість рядків цієї системи можна вилучити із розрахунку без значної втрати точності.

Можна показати, що для сигналу з моделлю порядку  $M$  необхідно вилучити  $M + 1$  рядків системи для того, щоб повністю видалити одну точку:

$$[S_{n_1, n_2, \dots}] = \begin{bmatrix} s_0 & \cdots & s_M \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n_1-1-M} & \cdots & s_{n_1-1} \\ s_{n_1+1} & \cdots & s_{n_1+1+M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{N-M-1} & \cdots & s_{N-1} \end{bmatrix}.$$

Оскільки система є однорідною, для існування коректного розв'язку необхідно, щоб кількість рядків не ставала меншою за  $M$ . Таким чином, для сигналу з загальною кількістю точок  $N$  оцінкою обмеження на максимальну кількість точок  $K$ , які можуть бути вилучені з сигналу є

$$N - M - K(M + 1) \geq M,$$

$$K \leq \frac{N - 2M}{M + 1}.$$

Якщо перевести дане значення у максимальну долю відкинутих точок як

$$\nu = \frac{1 - 2MN^{-1}}{M + 1},$$

то для сигналу з  $N = 200$  та порядком  $M = 10$  можна отримати  $K_{max} = 16$ ,  $\nu \approx 0.08$ , що є цілком прийнятним, оскільки в реальних сигналах доля імпульсних викидів зазвичай не перевищує 0.05.

Як в даному випадку так і в описаному далі підході відкидання точок для МПМ реальні кількість рядків які можуть бути відкинутими може бути значно більшою. Наприклад, два викиди, що розташовані поряд вимагають відкидання лише  $M + 2$ .

Автором було отримане документ на авторське право на даний метод [149]. Лістинг програми що реалізує даний метод можна побачити в додатку Е.

### 3.1.2 МПМ

У випадку МПМ частиною задачі є доведення працездатності алгоритму пропускання точок.

Побудуємо матрицю сигналу для МПМ з пропущеними рядками на основі повної матриці  $[S]$ . Дана матриця може бути подана на основі сингулярного розкладання як  $[S] = [U][\Sigma][V]^H$ , де матриці сингулярних векторів та чисел є урізаними у відповідності до порядку моделі. Можна побачити, що матриця  $[\hat{S}]$  з відкинутими рядками може бути отримана відкиданням відповідних рядків у  $[U]$  як  $[\hat{S}] = [\hat{U}][\Sigma][V]^H$ . Аналогічно до стандартного методу, на основі матриці  $[\hat{S}]$  можуть бути отримані часткові матриці сигналу  $[\hat{S}_{1,2}] = [\hat{U}][\Sigma][V_{1,2}]^H$ , де  $[V_1]$  та  $[V_2]$  – матриці сингулярних векторів з відкинутими першим та останнім рядками відповідно.

Розрахуємо значення  $[\hat{S}_2]^+ [\hat{S}_1]$ . При цьому отримаємо

$$[\hat{S}_2]^+ [\hat{S}_1] = [V_2]^+{}^H [\Sigma]^+ [\hat{U}]^+ [\hat{U}][\Sigma][V_1]^H = [V_2]^+{}^H [V_1]^H.$$

Як можна побачити, дана матриця дорівнює аналогічній матриці для стандартного випадку. Подаючи тепер матрицю сигналу з пропущеними рядками через її власне сингулярне розкладання з урізаними матрицями як  $[\hat{S}] = [\tilde{U}][\tilde{\Sigma}][\tilde{V}]^H$ , можна побачити, що  $[\hat{S}_2]^+[\hat{S}_1]$  може також бути подане як

$$[\hat{S}_2]^+[\hat{S}_1] = [\tilde{V}_2]^+{}^H[\tilde{\Sigma}]^+[\tilde{U}]^+[\tilde{U}][\tilde{\Sigma}][\tilde{V}_1]^H = [\tilde{V}_2]^+{}^H[\tilde{V}_1]^H,$$

де  $[\tilde{V}_{1,2}]$  – сингулярні вектори матриці сигналу, урізані аналогічно до стандартного методу.

При оцінці значень комплексної амплітуди використовується схожий метод з пропусканням відповідних частин матриці Вандермонда та точок сигналу. Після цього повний варіант матриці використовується разом з оціненими значеннями комплексних амплітудних коефіцієнтів для побудови апроксиманти сигналу (додаток Ж).

Як можна побачити, матрицю, для якої необхідно знайти власні числа для розв'язання задачі модифікованого МПМ, можна побудувати аналогічно до стандартного методу. Таким чином, після вилучення з матриці сигналу рядків, що відповідають шумливим точкам, процес аналізу можна проводити так само, як і для класичної реалізації МПМ.

Важливо зазначити, що кількість точок, які можна відкинути з послідовності, є обмеженою і залежить від порядку методу  $L$ . Для коректної роботи методу розмір результуючих матриць сигналу не повинен мати менше рядків за  $M$ , оскільки даний параметр є обмеженням на кількість можливих частот сигналу. Окрім цього, кожна відкинута точка прибирає з розрахунку  $L + 1$  рядків. Варто зазначити, що точки, які розташовані поряд, приводять до відкидання меншої кількості рядків, тож дана оцінка є верхньою межею. Кількість рядків за умови кількості точок  $N$  та порядку методу  $L$  може бути записана як  $K = N - L$ . Тоді верхня межа максимальної кількості точок, які можна відкинути виражається як

$$N - L - k(L + 1) \geq M,$$

$$k \leq \frac{N - L - M}{L + 1}.$$

Для сигналу з кількістю точок  $N = 200$ , порядком методу  $L = 15$  та порядком моделі  $M = 10$  дана кількість дорівнює  $k = 10$ , що відповідає 5% точок. Враховуючи, що дана оцінка – верхня межа, та факт того, що подібна доля викидів у сигналі є значною, застосування даного методу є доцільним.

### 3.1.3 Ідентифікація викидів

Метод відкидання точок дозволяє викидати проблемні частини сигналу проте не дає вказівок щодо їх пошуку або доцільної кількості. Проблема ідентифікації імпульсного шуму на даний момент знаходиться в стані розвитку та налічує велику кількість різноманітних підходів [150]. Більшість методів які при цьому використовуються є складними в реалізації та вибагливими до апаратного ресурсу. В якості демонстрації в даній роботі було застосовано два методи. Одним з них був відносно простий метод ідентифікації імпульсів заснований на ідеї узгодженої фільтрації. В даному випадку в якості цільового сигналу використовується послідовність

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}^T.$$

Під час роботи алгоритму сигнал ділиться на сегменти, які перетинаються так, що кожен наступний сегмент починається на одну точку пізніше. Після цього кожен сегмент скалярно множиться на сигнал-прототип, і модуль даного значення використовується в якості оцінки наявності імпульсу в даній точці сигналу.

Після отримання оцінки наявності імпульсу для кожної з точок сигналу вони сортуються від найвищого значення до найнижчого. Наступним етапом є

аналіз сигналу за допомогою методу Проні. При цьому спочатку точки не відкидаються. Після першої оцінки сигналу його форма та форма вхідного сигналу порівнюються за допомогою міри мінімуму тривалості як

$$\rho = \sum_n \{(|\Delta s_n|^2 + \sigma^2)^\beta - \sigma^{2\beta}\}.$$

Принцип мінімуму тривалості в даному випадку застосовується, оскільки у випадку аналізу реального сигналу версія без імпульсів для порівняння буде відсутня, отже, порівнювати якість відтворення доведеться на основі зашумленого сигналу. Далі аналогічна процедура повторюється для сигналу з однією відкинутою точкою (з найбільшим індексом наявності імпульсу), потім – з двома і т.д., поки значення відхилення не опиниться в точці локального мінімуму із заданим максимальним відхиленням.

Іншим випробуваним методом був метод оцінки скінченних різниць сигналу. При цьому сигнал було пропущено крізь різницевий фільтр, та модуль значень використовувався в якості оцінки наявності імпульсу в даній точці.

Обидва описані методи мають недолік у вигляді помилкової ідентифікації імпульсів для високочастотних сигналів, що демонструє необхідність подальшої розробки подібних методів.

Слід зазначити, що методи автоматичного підбору кількості точок для відкидання не обов'язково відкидають всі точки, у яких відбулися імпульси. Оскільки методи параметричного спектрального аналізу мають певну стійкість до поодиноких імпульсів малої амплітуди та частого імпульсного шуму, який набуває властивості білого, частина шумливих точок може бути залишена для збільшення розмірів системи і підвищення її стійкості. Аналогічно, певні точки з великими викидами білого шуму можуть бути додатково відкинуті для покращення точності оцінок (рис. 3.1).

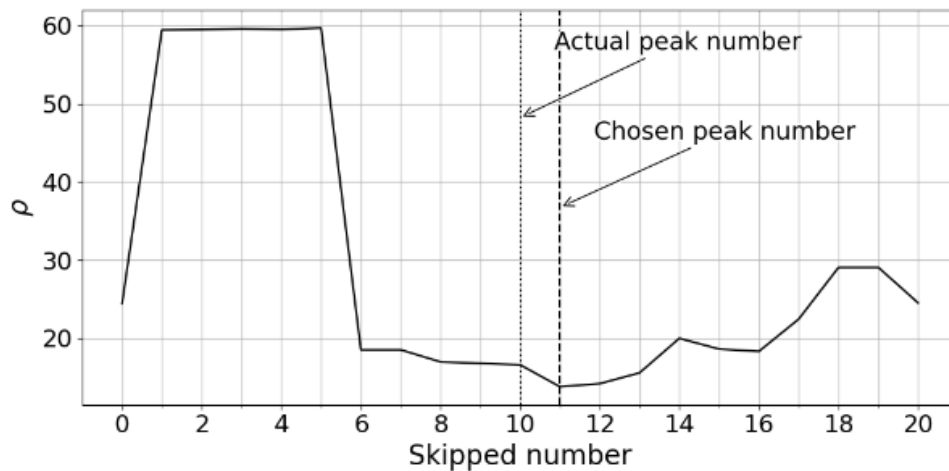


Рис. 3.1. Приклад результату автоматичного вибору кількості точок для відкидання

### 3.2 Метод коригування частоти

#### 3.2.1 Звичайний сигнал

Для випадків, коли сигнал може бути виражений у вигляді комплексно-експоненціальної моделі, задачі оцінки амплітудних та частотних коефіцієнтів розв'язуються окремо. При цьому точність пошуку частот впливає на точність подальших розрахунків для оцінки амплітуд, але процес розрахунку амплітудних коефіцієнтів не передбачає змін в оцінці частот.

Припустимо, що похибка при оцінці частотних коефіцієнтів є малою, що часто справджується для точних методів оцінки, таких, як метод пучка матриць. При цьому для оцінки значення сигналу при відхиленні частот можна записати

$$\hat{s}_n \approx s_n + \sum_{m=1}^M \frac{\partial s_n}{\partial \omega_m} \Delta \omega_m. \quad (3.1)$$

Для частинних похідних у випадку комплексно-експоненціального сигналу можна записати



$$\frac{\partial s_n}{\partial \omega_m} = \underline{A}_m \frac{\partial}{\partial \omega_m} e^{j\omega_m n \Delta t} = jn \Delta t \underline{A}_m e^{j\omega_m n \Delta t}.$$

Таким чином, (3.1) може бути переписано як

$$\begin{aligned} \hat{s}_n &\approx \tilde{s}_n = s_n + \sum_{m=1}^M jn \Delta t \underline{A}_m e^{j\omega_m n \Delta t} \Delta \omega_m = \\ &= \sum_{m=1}^M \underline{A}_m e^{j\omega_m n \Delta t} + \sum_{m=1}^M jn \Delta t \underline{A}_m e^{j\omega_m n \Delta t} \Delta \omega_m. \end{aligned}$$

Оскільки значення амплітудних коефіцієнтів та відхилень частот є незалежними, значення  $\underline{A}_m \Delta \omega_m$  доцільно вважати окремою змінною, яку тут і далі буде позначено як  $\underline{\alpha}_m$ . У такому випадку, з урахуванням всіх раніше введених позначень, значення в окремій точці може бути записано як

$$\tilde{s}_n = \sum_{m=1}^M \underline{A}_m z_m^n + \sum_{m=1}^M jn \Delta t \underline{\alpha}_m z_m^n.$$

На основі даного рівняння будується модифікована СЛАР для пошуку амплітудних коефіцієнтів:

$$\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ z_1 & \dots & z_M & j\Delta t z_1 & \dots & j\Delta t z_M \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{N-1} & \dots & z_M^{N-1} & j\Delta t(N-1)z_1^{N-1} & \dots & j\Delta t(N-1)z_M^{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A}_1 \\ \vdots \\ \underline{A}_M \\ \underline{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \underline{\alpha}_M \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \hat{s}_0 \\ \hat{s}_1 \\ \vdots \\ \hat{s}_{N-1} \end{bmatrix},$$

що може бути розв'язана стандартними методами (додаток И).

### 3.2.2 Сигнал, що пройшов крізь різницевий фільтр

Для деяких застосувань, таких, як оцінка відстаней методами інтерферометричного аналізу доцільно використовувати різницеву фільтрацію перед аналізом сигналу для придушення сталої частини. В такому випадку сигнал подається у вигляді

$$\Delta s_n = s_{n+1} - s_n.$$

Відомо, що для комплексно-експоненціального сигналу різницевий оператор надає сигнал вигляду

$$\Delta s_n = \sum_{m=1}^M (e^{j\gamma \Delta z} - 1) \underline{A}_m e^{j\gamma n \Delta z}. \quad (3.2)$$

В даному випадку існує два можливих підходи до аналізу сигналу оскільки перед амплітудним множником з'являється додатковий, який залежить від частоти.

Перший підхід полягає в поданні сигналу (3.2) у вигляді

$$\Delta \hat{s}_n(\Delta \underline{\beta}_1, \dots, \Delta \underline{\beta}_M) = \sum_{m=1}^M (e^{j(\beta_{m0} + \Delta \beta_m) \Delta z} - 1) \underline{A}_m e^{j(\beta_{m0} + \Delta \beta_m) n \Delta z},$$

де  $\beta_0$  – значення сталої поширення, отримане із попередніх розрахунків або відоме заздалегідь,

$\Delta \beta$  – невідоме значення відхилення сталої поширення.

Подаючи даний вираз за формулою (3.1), отримаємо

$$\Delta\hat{s}_n(\Delta\beta_1, \dots, \Delta\beta_M) \approx \Delta\hat{s}_n(0, \dots, 0) + \sum_{m=1}^M \left. \frac{\partial \Delta\hat{s}_n}{\partial \beta_m} \right|_{0, \dots, 0} \Delta\beta_m,$$

$$\left. \frac{\partial \Delta\hat{s}_n}{\partial \beta_m} \right|_{0, \dots, 0} = j\Delta z e^{j\beta_m \Delta z} \underline{A}_m e^{j\beta_m n \Delta z} + jn\Delta z (e^{j\beta_m \Delta z} - 1) \underline{A}_m e^{j\beta_m n \Delta z},$$

$$\Delta\hat{s}_n(\Delta\beta_1, \dots, \Delta\beta_M) \approx \sum_{m=1}^M (e^{j\beta_{m_0} \Delta z} - 1) \underline{A}_m e^{j\beta_{m_0} n \Delta z} +$$

$$+ \sum_{m=1}^M (e^{j\beta_{m_0} \Delta z} + n e^{j\beta_{m_0} \Delta z} - n) j\Delta z \underline{A}_m e^{j\beta_{m_0} n \Delta z} \Delta\beta_m.$$

Як можна побачити, в даному випадку початкове рівняння також перетворюється на лінійне, яке можливо розв'язати стандартними методами лінійної алгебри. В даному випадку результуюче рівняння розв'язується відносно значень  $(e^{j\beta_{m_0} \Delta z} - 1) \underline{A}_m$ , з яких потім розраховуються значення комплексних амплітуд. Варто звернути увагу на те, що в даному випадку для розрахунку застосовується початкове наближення коефіцієнта поширення.

Інший підхід полягає в розкладанні в ряд Тейлора до другого члена лише гармонічної частини. При цьому сигнал (3.2) може бути поданий у вигляді

$$\Delta\hat{s}_n(\Delta\beta_1, \dots, \Delta\beta_M) \approx$$

$$\approx \sum_{m=1}^M (e^{j(\beta_{m_0} + \Delta\beta_m) \Delta z} - 1) \underline{A}_m \left( e^{j\beta_{m_0} n \Delta z} + \frac{\partial}{\partial \beta} e^{j\beta n \Delta z} \Delta\beta_m \right),$$

$$\Delta\hat{s}_n(\Delta\beta_1, \dots, \Delta\beta_M) \approx \sum_{m=1}^M \left\{ (e^{j(\beta_{m_0} + \Delta\beta_m) \Delta z} - 1) \underline{A}_m e^{j\beta_{m_0} n \Delta z} + \right.$$

$$\left. + (e^{j(\beta_{m_0} + \Delta\beta_m) \Delta z} - 1) jn\Delta z \underline{A}_m e^{j\beta_{m_0} n \Delta z} \Delta\beta_m \right\}.$$

Дане рівняння може бути розв'язане як лінійне алгебраїчне відносно невідомих  $(e^{j(\beta_{m_0} + \Delta\beta_m) \Delta z} - 1) \underline{A}_m$  та  $(e^{j(\beta_{m_0} + \Delta\beta_m) \Delta z} - 1) jn\Delta z \underline{A}_m \Delta\beta_m$ . Оскільки

в даному випадку у множник перед значенням комплексної амплітуди входить фактичний коефіцієнт поширення, для оцінки амплітуд необхідно знайти всі невідомі, вивести з них значення корекції сталої поширення і застосувати його для отримання уточнених значень амплітуд. Подібна двоетапна процедура є більш алгоритмічно складною, проте, як буде показано при тестуванні використання точного виразу для множника перед значенням комплексної амплітуди, покращує якість результатів.

Автором було отримано авторське право на даний метод [151].

### 3.3 Висновки

1. Структура методу Проні дозволяє відкинути певну кількість точок сигналу без значного впливу на працездатність методу. Завдяки цьому було реалізовано підхід для подолання проблем, які вносить наявність імпульсного шуму.
2. Алгоритм МПМ, застосований в даному дослідженні, також дозволяє застосування матриці сигналу із пропущеними рядками і, відповідно, підтримує застосування методу пропускання точок. В ході дисертаційного дослідження було розроблено та реалізовано відповідний підхід.
3. Як для методу Проні, так і для МПМ було отримано оцінку нижньої межі максимальної кількості точок, які можуть бути відкинуті із сигналу із збереженням працездатності методу. Для звичайних параметрів сигналу дана межа є задовільною при використанні сучасної апаратури для вимірювання.
4. Для підвищення універсальності підходу пропускання точок необхідна розробка методів детектування імпульсного шуму. В даній роботі запропоновано базовий підхід до цієї задачі на основі принципу мінімуму протяжності.
5. Існують випадки, в яких модифікація оцінок частот на етапі оцінки амплітудних коефіцієнтів призводить до покращення оцінки останніх та

побудови апроксиманти сигналу. У відповідності до цього було розроблено, математично обґрунтовано та програмно реалізовано підхід коригування частот для методу Проні та МПМ.

6. Реалізація модифікації частотних коефіцієнтів також для сигналу, що пройшов через різницевий фільтр. В ході дослідження було розроблено та реалізовано відповідний алгоритм.

## РОЗДІЛ 4 ВИПРОБУВАННЯ ЗАПРОПОНОВАНИХ МЕТОДІВ ТА АЛГОРИТМІВ

### 4.1 Застосування параметричного спектрального аналізу для радарної дальнометрії

З метою перевірки потенційної працездатності методів параметричного спектрального аналізу до задачі вимірювання відстаней за допомогою багаточастотного методу було проведено комп'ютерну симуляцію випромінюючої структури та відбивача. Для цього було побудовано модель рупорної антени з фідерним хвилеводом, яку показано на рис. 4.1.

Як можна побачити, дана антенно-фідерна структура має додатковий рупор, який є необхідним для симуляції узгодженого терміатора на зворотному кінці фідера, оскільки метод допоміжних джерел на даний момент не підтримує симуляції подібних структур.

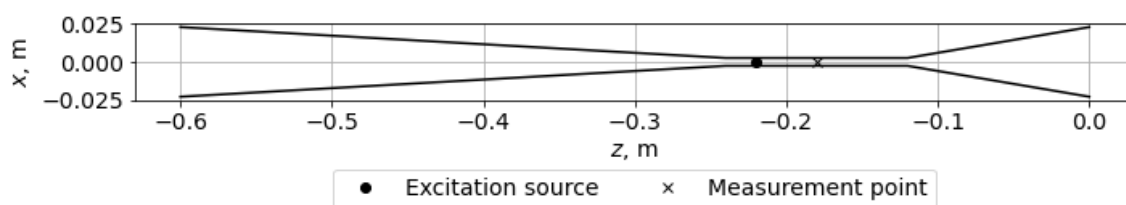


Рис. 4.1. Модель рупорної антени

Для убезпечення достатньої точності розрахунку точки в моделі хвилеводної структури згущувались, поки амплітуда поля за межами фідера не ставала достатньо малою у порівнянні з амплітудою поля перед антеною.

З метою додаткової перевірки якості симуляції результат симуляції проходження імпульсу в фідерній лінії, отриманий методом синтезування, було порівняно з теоретичним виразом. Як можна побачити на рис. 4.2, результат моделювання з високою точністю відтворює реальну поведінку електромагнітних хвиль у хвилеводних структурах.

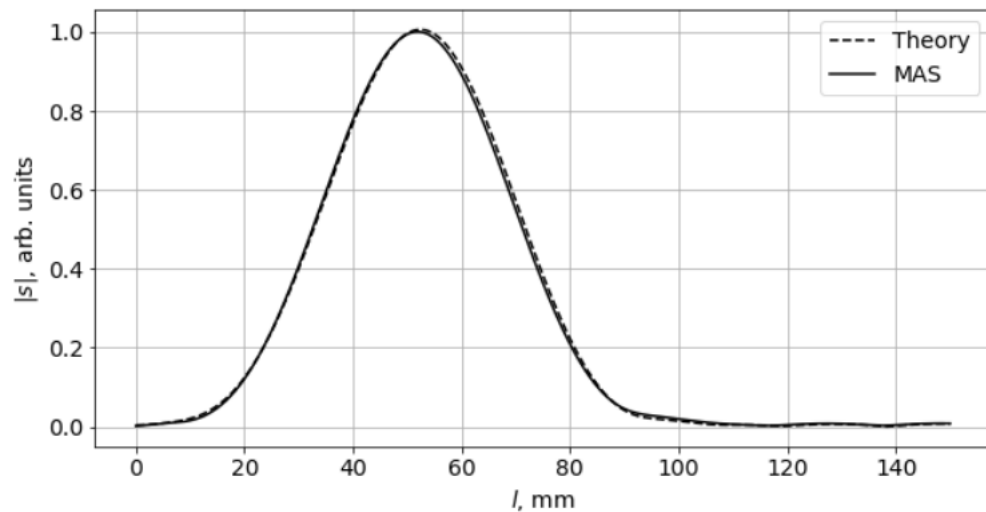


Рис. 4.2. Порівняння синтезованого імпульсу з теоретичним

Після побудови моделі експеримент було проведено на частотах в межах між 38 та 52 ГГц та поперечних положень осі антени у межах від -40 до 40 мм. В якості відбивача при симуляції використовувалась модель одиничної металевої пластини з шириною, що дорівнює 10 мм. В результаті була отримана двовимірною залежність комплексного коефіцієнту відбиття виміряного у системі від положення та частоти (рис. 4.3).

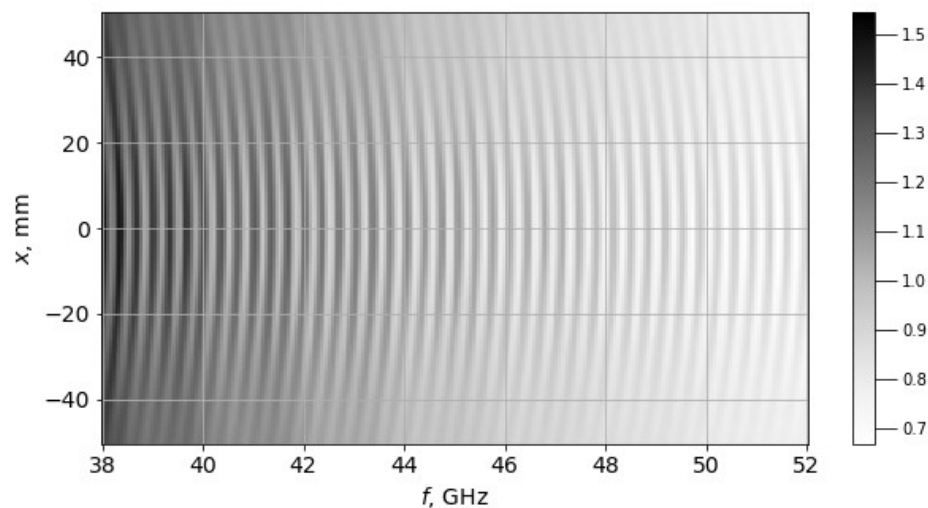


Рис. 4.3. Приклад результату радарного багаточастотного сканування (амплітуда)

Для перевірки коректності моделі спочатку було застосовано стандартний віконний метод Фур'є. При цьому тут і далі для надання найкращого можливого результату за допомогою цього методу застосовувався віконний підхід з модифікованим вікном Хемінга вигляду

$$w_n = 1 - \frac{0.46}{0.54} \cos\left(\frac{2\pi}{N} n\right),$$

яке відрізняється правильністю відтворення амплітуд при достатньому придушенні ефектів аперіодичності сигналу [103].

Як можна побачити на рис. 4.4, результат симуляції відповідає очікуваній картині.

При подальшому тестуванні метод ДПФ, метод Проні та МПМ були застосовані для оцінки різниці між відстаням до двох металевих пластин, розташованих перед антеною.

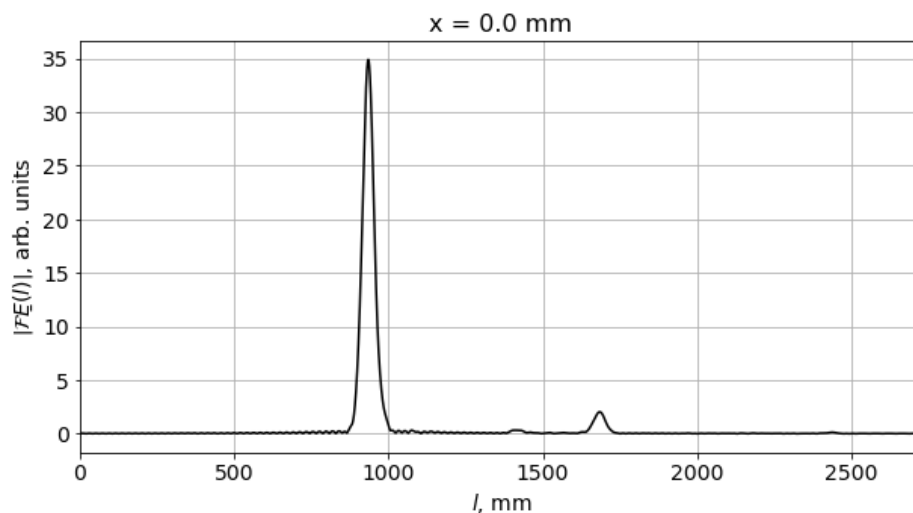


Рис. 4.4. Результат обробки отриманої залежності для одного положення антени за допомогою стандартного методу Фур'є

Перед початком комп'ютерного експерименту результат радарного сканування, отриманий за допомогою реального експерименту, було порівняно з



результатом моделювання. Як можна побачити на рис. 4.5, результат моделювання у значній мірі відповідає реальному експерименту.

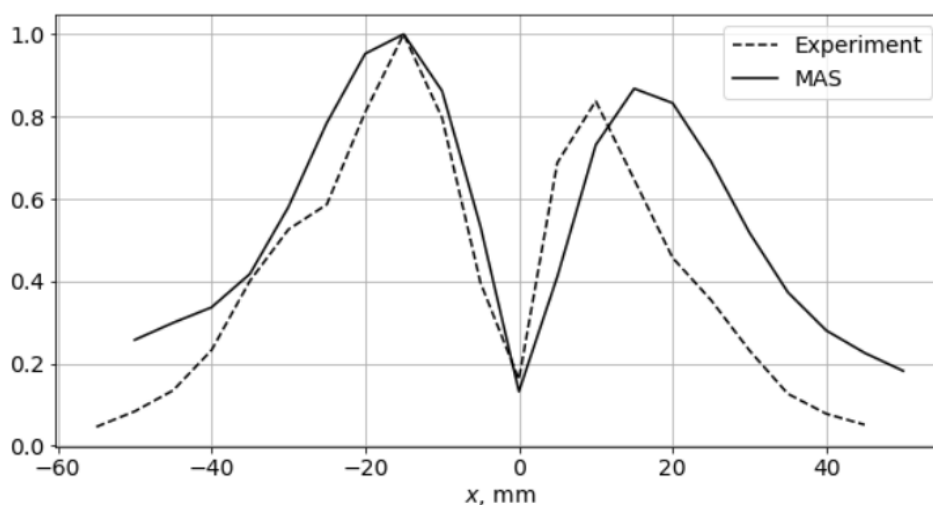


Рис. 4.5. Порівняння результату сканування за допомогою реальної установки та моделювання методом допоміжних джерел

При моделюванні було згенеровано 256 значень коефіцієнта відбиття в частотних межах, що зазначені вище. При цьому в методі ДПФ було додатково застосовано метод додавання нулів до сигналу з метою покращення точності шляхом інтерполяції частотної характеристики. Для методу МПМ було застосовано параметр моделі, що дорівнював  $0.5N = 128$ , для досягнення балансу між швидкістю та точністю розрахунку. Як можна побачити на рис. 4.6, параметричні методи були здатні надати значно кращу точність за метод ДПФ для істинного значення зміщення між пластинами, що дорівнювало 1.64 мм.

Даний експеримент було повторено для відстаней 6 мм та 10 мм від відбивача. Для всіх дослідів було розраховано середньоквадратичне значення відхилення оцінки вздовж поперечного напрямку та час розрахунку, які можна побачити у табл. 4.1 та табл. 4.2 відповідно. Таким чином, застосування параметричних методів спектрального аналізу в даному випадку значно покращило точність оцінки і, в той самий час, не поступалось за часом виконання методу ДПФ.

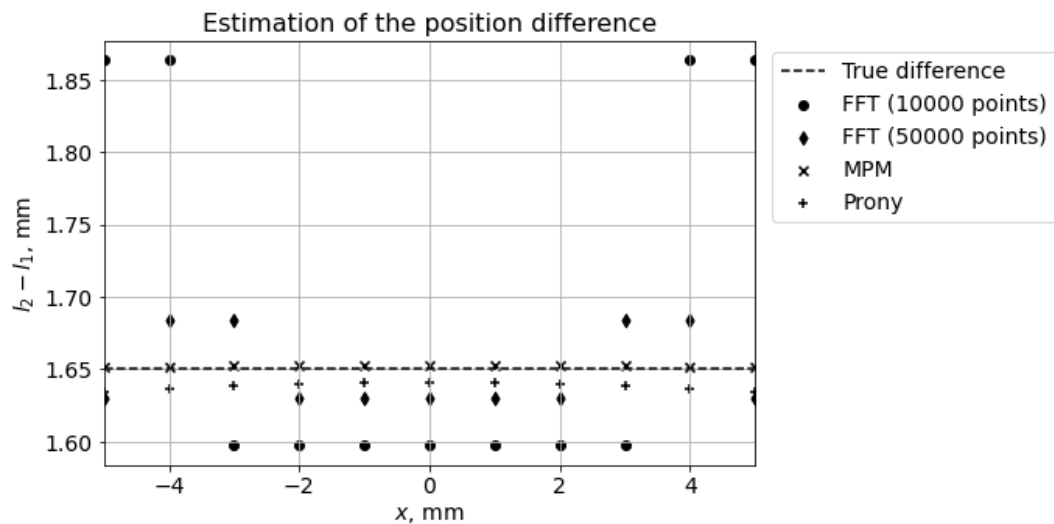


Рис. 4.6. Залежність оцінки різниці положення відбивачів від поперечної позиції осі опромінюючої системи

Табл. 4.1.

	RMS deviation, mm		
True distance	1.64 mm	6 mm	10 mm
FFT (10000 zeros)	0.135	0.123	0.116
Prony	0.012	0.030	0.035
FFT (50000 zeros)	0.026	0.026	0.025
MPM	0.002	0.007	0.012

Табл. 4.2.

	Calculation time, ms		
True distance	1.64 mm	6 mm	10 mm
FFT (10000 zeros)	19	19	18
Prony	7	6	6
FFT (50000 zeros)	145	146	149
MPM	92	98	96

#### 4.2 Застосування методу сегментування сигналу до методу пучка матриць

В процесі роботи метод сегментування сигналу було застосовано для покращення точності роботи МПМ в умовах наявності білого та імпульсного шуму в сигналі.

В ході початкового тестування було емпірично виявлено, що оцінка якості, яка обчислюється як

$$w = \frac{L}{L - M} \frac{P}{\sigma_N^2} - 1 \quad (4.1)$$

є кращою ніж звичайне значення SNR. Саме ця оцінка була в подальшому використана при проведенні експериментів із сегментним підходом до МПМ. Доцільні значення параметрів сегментування були отримані за допомогою методу описаному в розділі 2. Для виразу (4.1) значення параметру МПМ склало  $L = 5$ , довжина сегменту –  $K = 23$ , а крок між сегментами –  $\Delta n = 1$  для випадку моночастотного сигналу із загасанням.

На початковому етапі стандартний підхід та сегментні форми МПМ з різними оцінками «якості» було випробувано на моночастотному сигналі з нормованими частотами від 0.01 до 0.49 з кроком 0.01. Як продемонстровано на рис. 4.7 та рис. 4.8, всі методи оцінки для сегментного підходу дають вигреш у точності при порівнянні зі стандартним методом для обох його модифікацій.

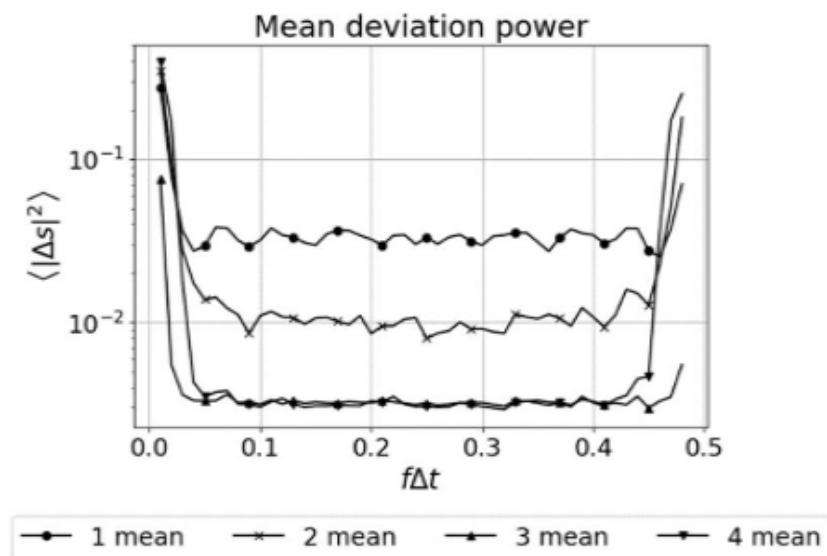


Рис. 4.7. Залежність точності відтворення моночастотного сигналу від нормованої частоти за методом оцінки частот. 1 – стандартний МПМ, 2 – медіанна оцінка, 3 – зважена медіанна оцінка, 4 – зважена середня оцінка

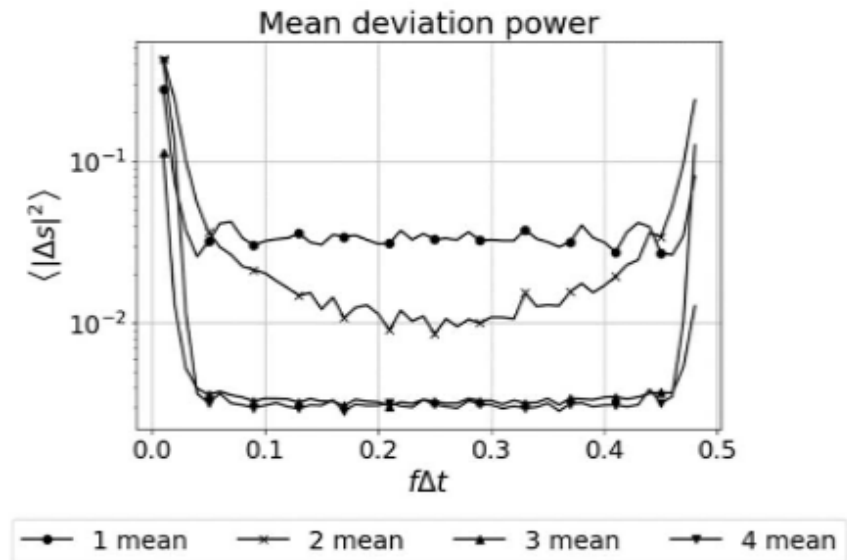


Рис. 4.8. Залежність точності відтворення одночастотного сигналу від нормованої частоти за методом оцінки коефіцієнтів лінійного передбачення. 1 – стандартний МПМ, 2 – медіанна оцінка, 3 – зважена медіанна оцінка, 4 – зважена середня оцінка

Слід зазначити, що застосування методу сегментування підвищує час розрахунку, як продемонстровано на рис. 4.9 та рис. 4.10.

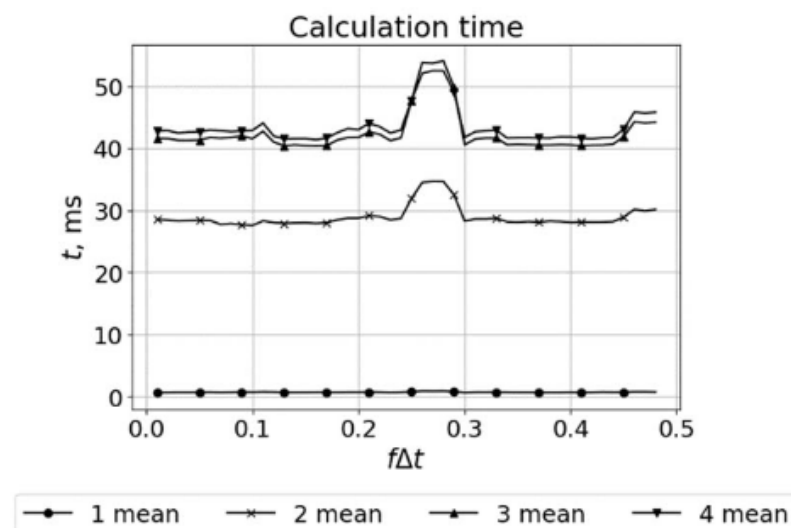


Рис. 4.9. Залежність часу аналізу одночастотного сигналу від нормованої частоти за методом оцінки частот. 1 – стандартний МПМ, 2 – медіанна оцінка, 3 – зважена медіанна оцінка, 4 – зважена середня оцінка

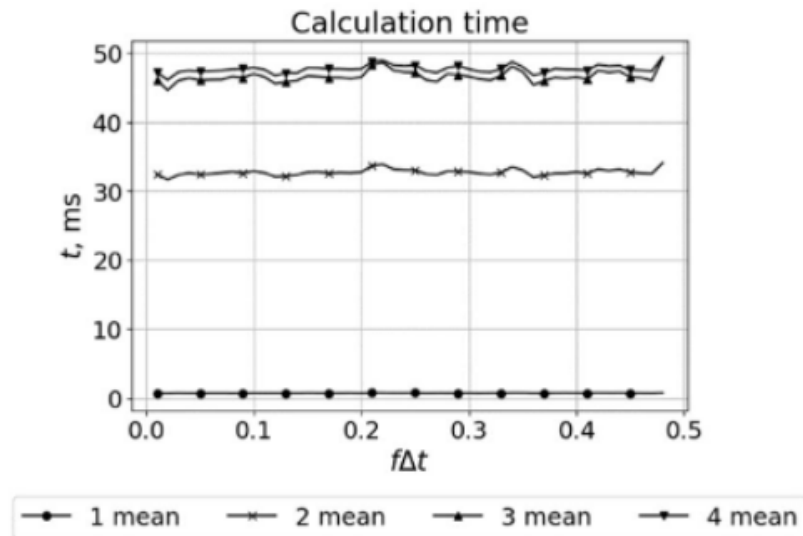


Рис. 4.10. Залежність часу аналізу одночастотного сигналу від нормованої частоти за методом оцінки коефіцієнтів лінійного передбачення. 1 – стандартний МПМ, 2 – медіанна оцінка, 3 – зважена медіанна оцінка, 4 – зважена середня оцінка

У ході подальших експериментів метод сегментування було застосовано для аналізу багаточастотного сигналу з різною кількістю компонент. Кількість дійсних синусоїдальних компонент при цьому змінювалась в межах від 1 до 4, що відповідає порядку моделі від 2 до 8 відповідно. Для кожної з кількостей генерувалось по 1000 реалізацій сигналу. При цьому значення нормованих частот були рівномірно розподіленими в діапазоні між 0.1 до 0.4. Мінімальна дозволена відстань між частотами компонент складала 0.01. Значення амплітуд обирались із діапазону між 0.5 до 1.5 з рівномірним розподілом. Інтенсивність білого та імпульсного шумів у даному випадку були задані таким же чином, як і для моночастотного випадку. Для випадку багаточастотного сигналу параметри сегментованого МПМ складали  $L = 25$ ,  $K = 50$ ,  $\Delta n = 11$ .

Як можна побачити на рис. 4.11, метод прямої оцінки частот дозволяє покращити якість відтворення сигналу для різних кількостей частотних компонент за правильного вибору методу оцінки. Задача пошуку найкращих оцінок якості сегменту залишається відкритою і вимагає подальших досліджень.

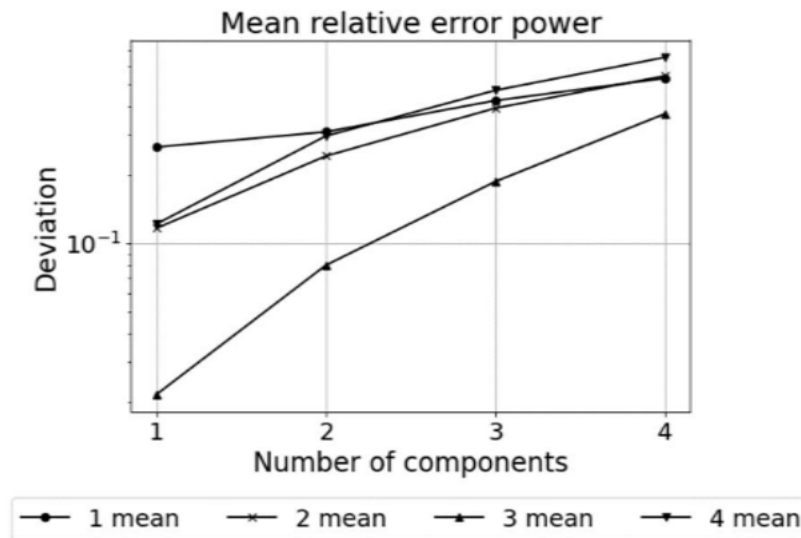


Рис. 4.11. Залежність середнього відхилення відтвореного сигналу від кількості синусоїдальних компонент (оцінка частот). 1 – стандартний МПМ, 2 – медіанна оцінка, 3 – зважена медіанна оцінка, 4 – зважена середня оцінка

На рис. 4.12 продемонстровано, що метод оцінки коефіцієнтів лінійного передбачення також є перспективним для певних порядків моделі та потребує подальшого вивчення.

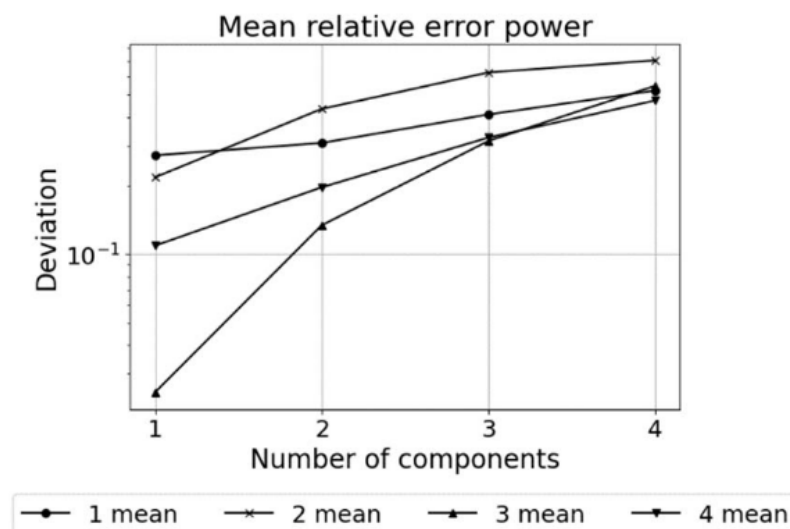


Рис. 4.12. Залежність середнього відхилення відтвореного сигналу від кількості синусоїдальних компонент (оцінка коефіцієнтів лінійного передбачення). 1 – стандартний МПМ, 2 – медіанна оцінка, 3 – зважена медіанна оцінка, 4 – зважена середня оцінка

### 4.3 Застосування методу відкидання точок для аналізу сигналу методом Проні

При проведенні початкових випробувань було показано (рис. 4.13), що наявність імпульсної завади в сигналі здатна призводити до помилкової роботи методу.

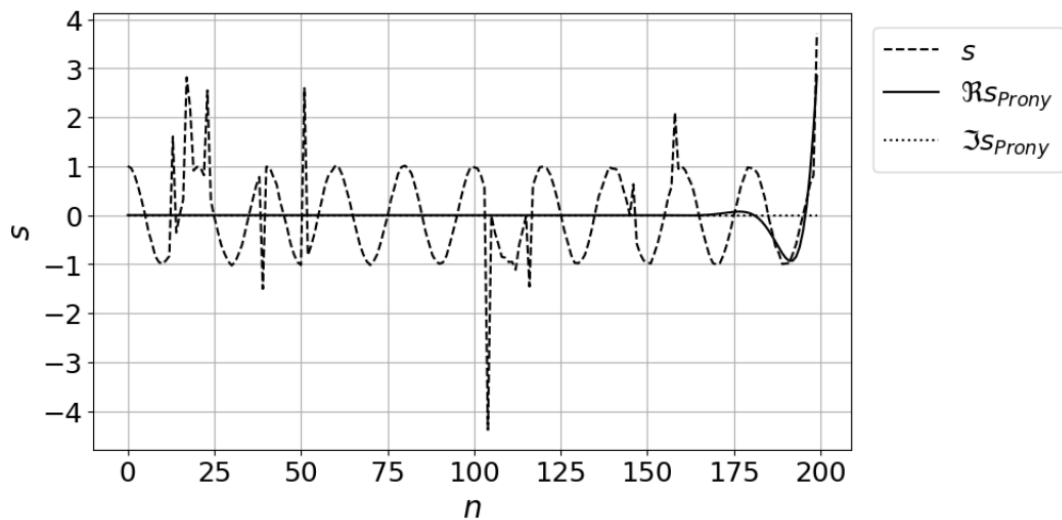


Рис. 4.13. Результат обробки сигналу з імпульсним шумом за допомогою класичної схеми методу Проні за підходом власного вектору

Як можна побачити, застосування методу призвело не лише до пригнічення сигналу, а і до появи розбіжної компоненти. Застосування методу пропускання точок з відомими положеннями імпульсів до сигналу значно покращує якість відтворення, як можна побачити на рис. 4.14.

У ході експерименту результат обробки сигналу методом відкидання точок було порівняно зі звичайним методом Проні. При цьому було випробувано як варіант, при якому точні положення імпульсів були заздалегідь ідеально відомі (симуляція застосування більш просунутого методу їх ідентифікації), так і варіант застосування ідентифікації імпульсів на основі методу узгодженої фільтрації. Як можна побачити на рис. 4.15, метод пропускання точок здатен

точніше апроксимувати початковий сигнал навіть для випадку використання простої схеми ідентифікації імпульсів.

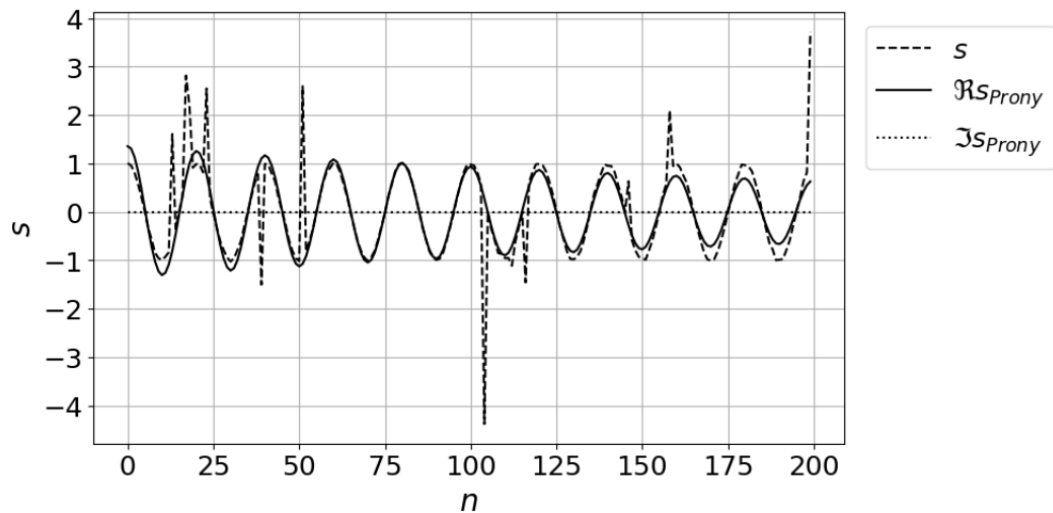


Рис. 4.14. Результат відтворення сигналу за допомогою методу пропускання точок з відомими положеннями імпульсів

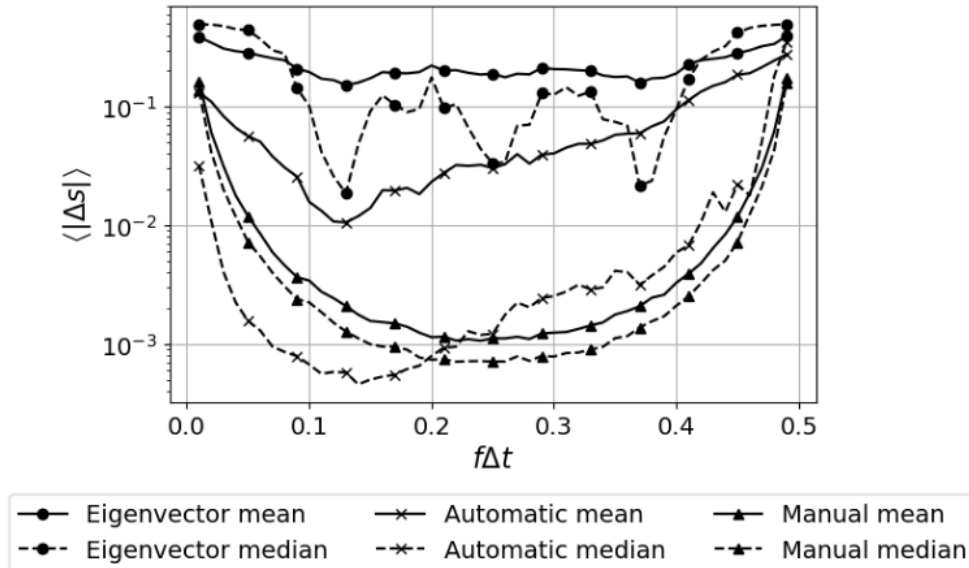


Рис. 4.15. Залежність точності відтворення сигналу від частоти звичайним методом Проні та методом пропускання точок (середні та медіанні значення загального відхилення)

При цьому для певних частот результат оцінки виявляється в сенсі медіанного значення кращим, ніж для випадку ідеальної ідентифікації, що



пояснюється відкиданням не всіх точок або додатковим відкиданням високих піків, викликаних білим шумом.

У випадку ідеальної ідентифікації піків метод є більш стабільним, що можна побачити із близькості середнього та медіанного значення відхилень. Для випадку автоматичної ідентифікації значні значення середнього відхилення в основному утворюються поодинокими випадками отримання розбіжної апроксимаційної послідовності, що є простими в ідентифікації, оскільки відхилення при цьому набуває надзвичайно великих значень.

Метод відкидання точок було також порівняно з методом сегментування сигналу (рис. 4.16).

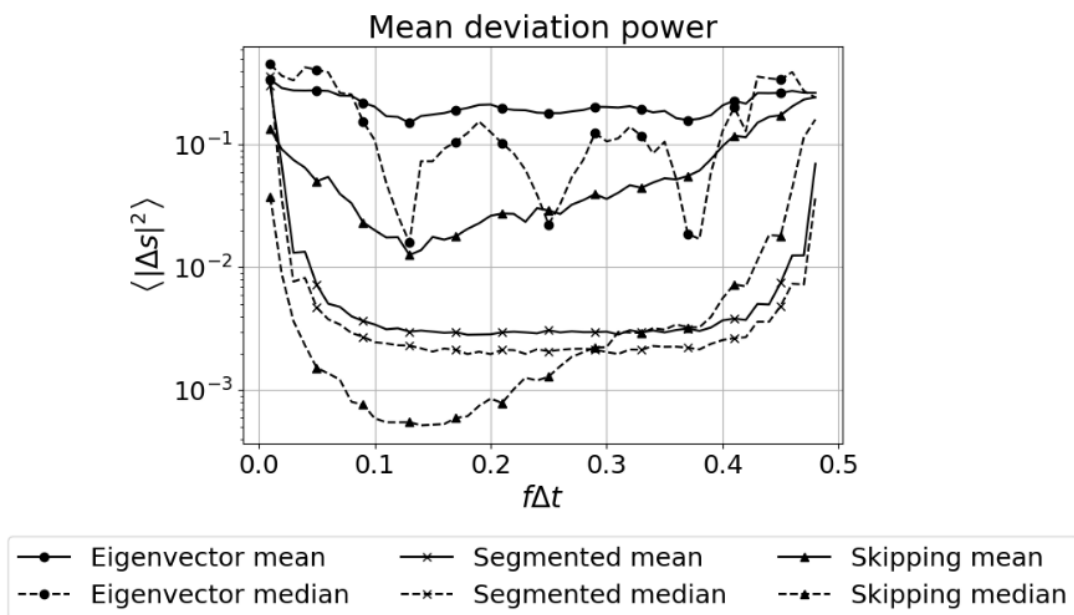


Рис. 4.16. Порівняння стандартного методу Проні, методу сегментування та методу відкидання точок

Як можна побачити, метод сегментування в даному випадку надав більш стабільну залежність точності від нормованої частоти сигналу, проте метод відкидання точок був здатен надати кращу точність в сенсі медіанного значення для достатньо широкого діапазону. Слід зазначити, що в даному випадку було застосовано метод автоматичного пошуку імпульсів, який, як показано вище, має потенціал для покращення.

Для дослідження доцільності застосування запропонованих методів детектування імпульсів було проведено експеримент, під час якого класичний метод Проні та метод сегментування було порівняно з методом пропускання точок з підходом скінчених різниць та підходом узгодженого фільтрування. В даному випадку для методу сегментування застосовувався підхід медіанного усереднення коефіцієнтів лінійного передбачення сигналу. Як можна побачити на рис. 4.17 та рис. 4.18, різні підходи до детектування імпульсів призводять до кращої оцінки сигналу за різних нормованих частот.

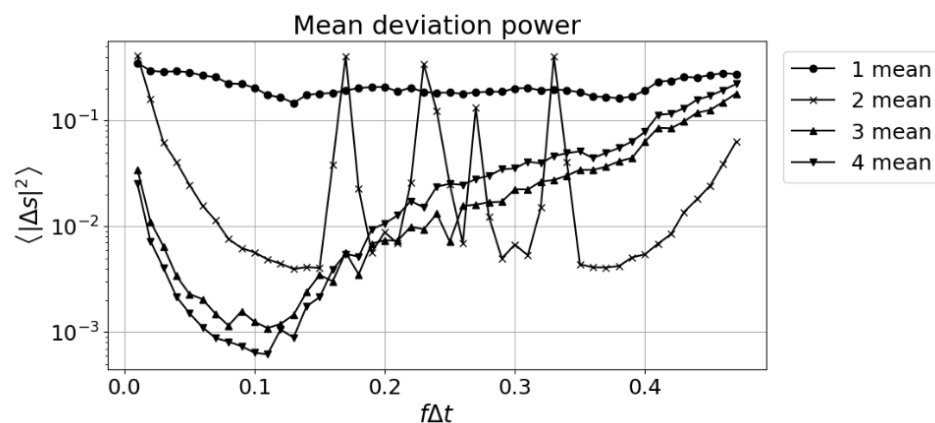


Рис. 4.17. Залежність середнього значення потужності похибки відтворення сигналу від нормованої частоти. 1 – метод Проні, 2 – метод сегментування, 3 – метод пропускання точок зі скінченими різницями, 4 – метод пропускання точок з узгодженою фільтрацією

При аналізі отриманих залежностей також можна зробити висновок про те, що за високих значень нормованих частот обидва методи стають нестабільними, про що свідчить велика різниця між середнім та медіанним значенням потужності похибки. Даний ефект пояснюється тим, що при наближенні до частоти Найквіста гармонічний сигнал перетворюється на послідовність, що схожа на ряд імпульсів, які постійно йдуть один за одним. Даний факт може призвести до помилкової ідентифікації. При цьому помилково ідентифіковані імпульси можуть перевищувати за амплітудою малі шумові імпульси, що

призводить до залишення їх в сигналі під час аналізу. Дана поведінка свідчить про необхідність подальшої розробки методів ідентифікації імпульсного шуму.

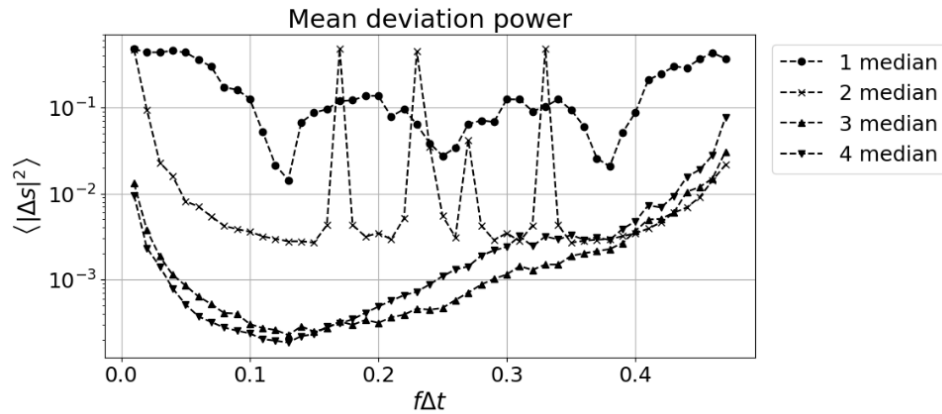


Рис. 4.18. Залежність медіанного значення потужності похибки відтворення сигналу від нормованої частоти. 1 – метод Проні, 2 – метод сегментування, 3 – метод пропускання точок зі скінченими різницями, 4 – метод пропускання точок з узгодженою фільтрацією

При подальшому дослідженні було проведено комп'ютерний експеримент з багаточастотними сигналами. При цьому сигнали мали значення нормованих частот в межах від 0.1 до 0.4 з мінімальною відстанню між сусідніми частотами  $\Delta f_{min} = 0.01$ . Компоненти сигналу мали випадкову амплітуду, що обиралась в межах від 0.5 до 1.5, та випадковий коефіцієнт загасання, що обирався в межах від 0 до значення, яке відповідало зменшенню амплітуди сигналу в 10 разів в останній точці. Окрім цього, кожній компоненті надавалась випадкова початкова фаза в межах від 0 до  $\pi$ . Всі параметри сигналу мали рівномірний розподіл у відповідних межах. Як можна побачити на рис. 4.19, метод пропускання точок залишається найкращим для більших кількостей компонент.

В ході подальших випробувань метод пропускання точок було застосовано для аналізу згенерованої залежності комплексного коефіцієнта відбиття від частоти на основі формули для товстої одношарової структури відповідно до (1.1) для випадку знаходження її у вакуумі. Експеримент було проведено для

ряду товщин в межах від 0.1 м до 0.3 м та діелектричних проникностей в межах від 1.5 до 3. Значення коефіцієнту відбиття при цьому вимірювались для частот в межах між 8 до 12 ГГц.

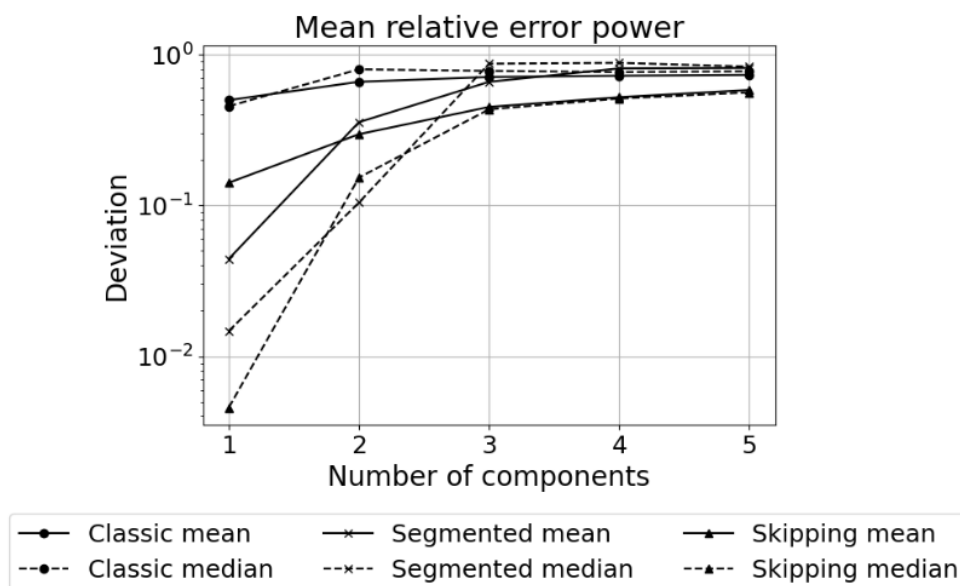


Рис. 4.19. Залежність точності відтворення сигналу від кількості синусоїдальних компонент для різних методів аналізу

До сигналу додавався білий шум з  $\text{SNR} = 30$  дБ та імпульсний шум з ймовірністю появи імпульсу в точці  $p = 0.05$ , та середнім значенням і стандартним відхиленням амплітуди імпульсу, що були в 2 рази більшим та таким самим відносно середньоквадратичного значення нешумливого сигналу відповідно. Як можна побачити на рис. 4.20, застосування методу пропускання точок в даному випадку надає можливість більш точної оцінки товщини шару.

Під час подальшого тестування метод пропускання точок було випробувано для аналізу даних, отриманих в ході реального експерименту. При цьому проаналізованим був результат багаточастотного опромінення відбивача у вигляді металевої пластини, що був розташований на відстані 240 мм від апертури антени.

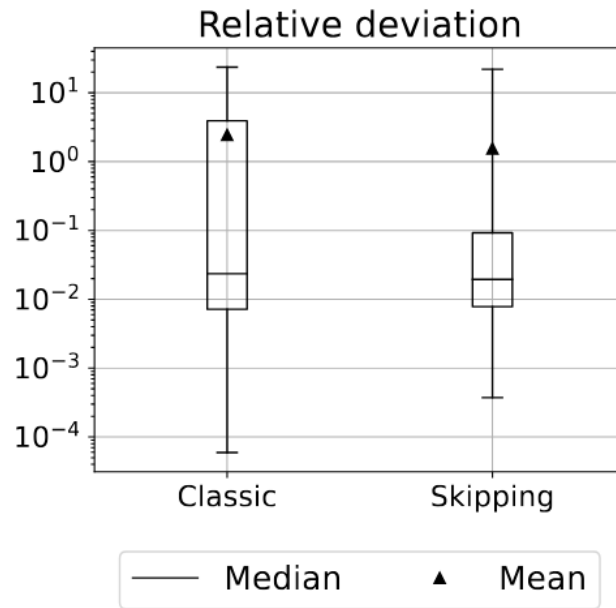


Рис. 4.20. Розподіл відносного відхилення оцінки товщини шару за допомогою стандартного методу Проні та методу пропускання точок

Як можна побачити на рис. 4.21, отримана залежність має викид у вигляді імпульсу, який з'явився внаслідок нестабільності напруги в мережі під час експерименту.

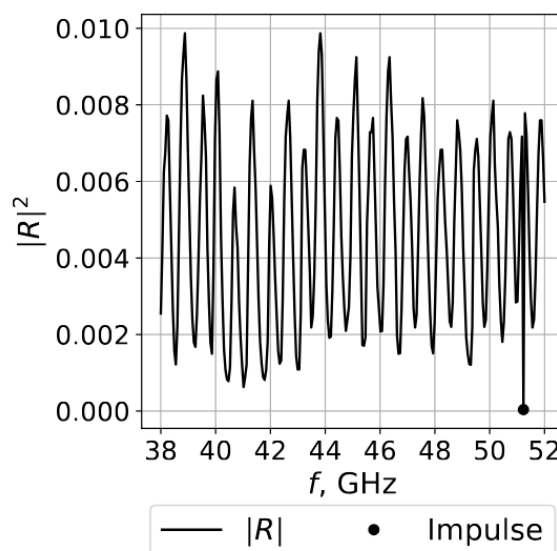


Рис. 4.21. Амплітудно-частотна характеристика, знята при проведенні реального експерименту

Як можна побачити на рис. 4.22, метод пропускання точок успішно відтворив значення положення відбивача. При цьому застосування стандартного методу Проні з порядком моделі  $M = 5$  дало оцінку  $l = 247.3$  мм, а застосування підходу пропускання точок дало значення оцінки  $l = 242.1$  мм.

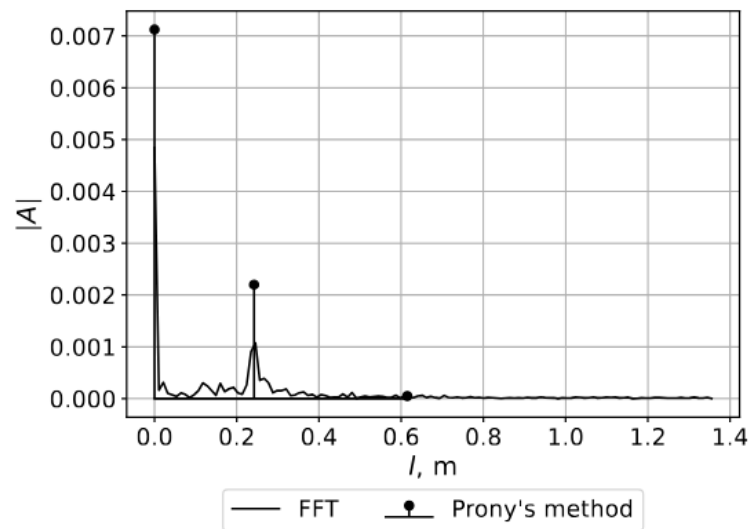


Рис. 4.22. Результат аналізу даних реального експерименту за допомогою методу Проні з підходом відкидання точок

#### 4.4 Застосування методу відкидання точок для аналізу сигналу за допомогою МПМ

Напочатку для перевірки працездатності методу його було застосовано для оцінки параметрів моночастотного гармонічного сигналу для нормованих частот в межах від 0.01 до 0.49 з кроком 0.01 для того, щоб забезпечити максимальне покриття всіх можливих нормованих частот. При цьому для кожного кроку генерувалось 1000 реалізацій шумової складової, що складалась з білого Гауссівського шуму з  $\text{SNR} = 30$  дБ та імпульсного шуму з середнім розміром викиду 2, стандартним відхиленням висоти викиду 0.5 та ймовірністю появи імпульсу 0.05. При цьому для стандартного підходу та підходу з відкиданням точок було обрано порядок методу  $L = 15$ . Окрім МПМ, в даному випадку порівнювались також результати застосування методу Проні за стандартним

методом, описаним в, та параметричного методу Фур'є. Як можна побачити на рис. 4.23, за однакового порядку методу обробки метод відкидання точок дозволяє досягнути кращого відтворення сигналу, ніж стандартні підходи.

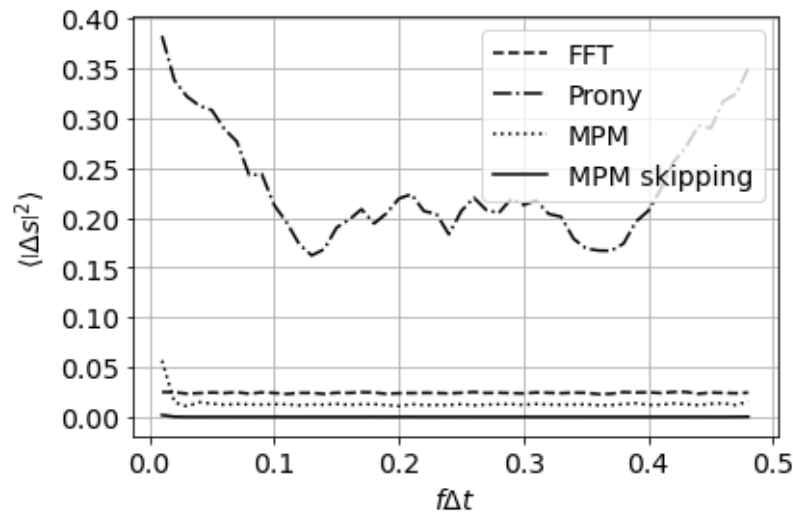


Рис. 4.23. Залежність точності відтворення сигналу від нормованої частоти

Подальші випробування проводились для рандомізованих комплекснозначних гармонічних сигналів типу  $s_n = \sum_{m=1}^M \underline{A}_m e^{j\omega_n \Delta t}$ .

Спочатку експеримент було проведено для сигналів з дійсними значеннями частот в межах, аналогічних до моночастотних комп'ютерних експериментів. При цьому в програму закладалася мінімальна дозволена відстань між нормованими частотами для запобігання проблемам з моделлю пов'язаних зі злиттям компонент. Амплітуди задавалися в межах від 0.5 до 1.5 з рівномірно розподіленою фазою в межах від  $-\pi$  до  $\pi$ . Кількість компонент обиралась випадково в межах від 2 до 6. В даному випадку порядок методу знову було встановлено як  $L = 15$  для обох алгоритмів. Як можна побачити на рис. 4.24, метод пропускання точок знову був здатен надати кращі результати, ніж стандартний підхід.

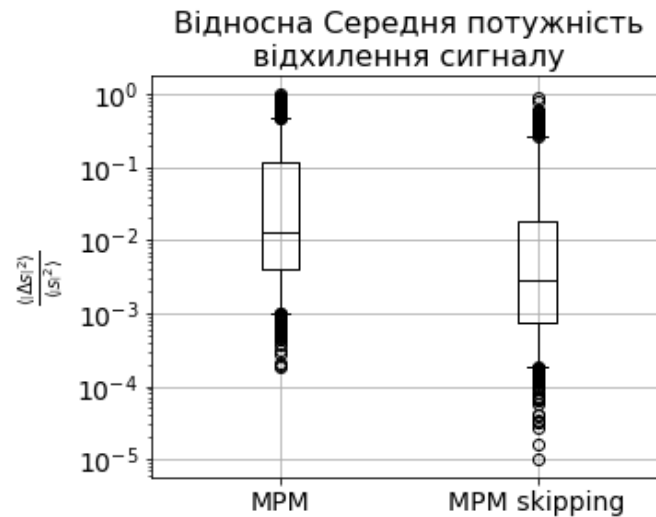


Рис. 4.24. Розподіл середньої потужності відхилення сигналу

Подібні результати були отримані також для оцінок окремих параметрів сигналу, таких як комплексні амплітуди та комплексні частоти (рис. 4.25, 4.26).

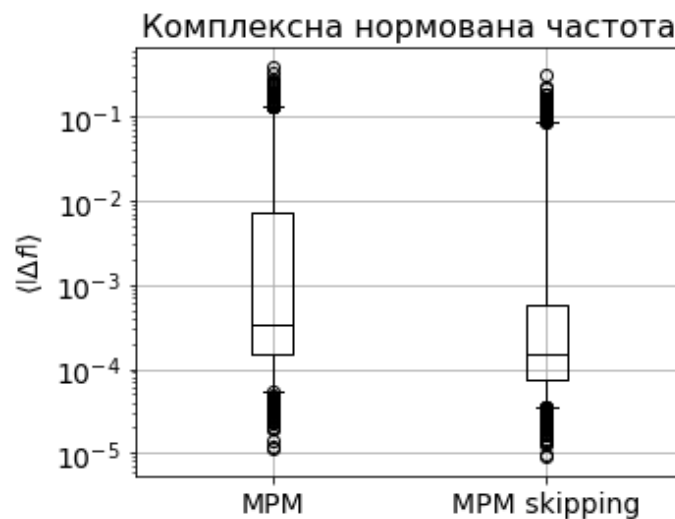


Рис. 4.25. Розподіл модуля відхилення нормованої комплексної частоти

Для кількісного порівняння результати було зібрано в табл. 4.3.

Як можна побачити, модифікований метод був здатен точніше відтворити параметри сигналу та сам сигнал як в середньому, так і в медіанному сенсі.



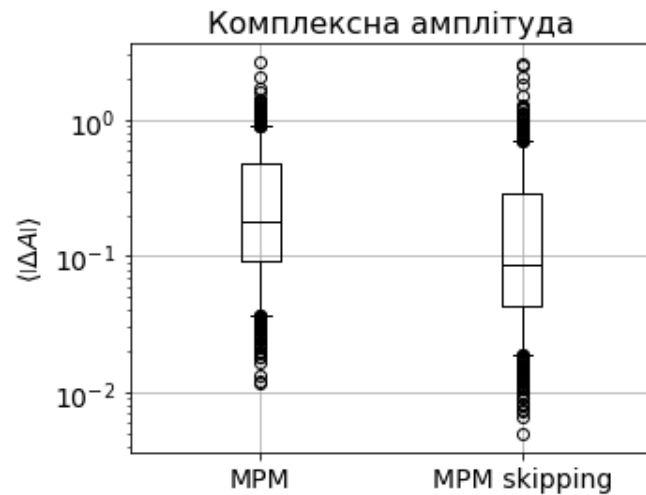


Рис. 4.26. Розподіл модуля відхилення комплексної амплітуди

Табл. 4.3. Порівняння результатів для незатухаючого сигналу

Метод	$\langle \langle  \Delta \underline{s} ^2 \rangle \rangle$	$\text{med } \langle  \Delta \underline{s} ^2 \rangle$	$\langle  \Delta \underline{f}  \rangle$	$\text{med }  \Delta \underline{f} $	$\langle  \Delta \underline{A}  \rangle$	$\text{med }  \Delta \underline{A} $
Стандартний	0.10	0.013	0.023	0.0003	0.31	0.18
Модифікований	0.04	0.002	0.010	0.0001	0.20	0.09

Для подальших досліджень значення комплексних частот мали ненульову уявну частину, яка задавалась так, щоб відношення значень обвідної окремої компоненти набувало значення від 1 до 10. Результати для сигналу зі згасанням були якісно аналогічними до результатів сигналу без згасання як для загального відтворення сигналу (рис. 4.27), так і для параметрів сигналу (рис. 4.28, 4.29).

Аналогічно до випадку незгасаючого сигналу були отримані також кількісні значення якості відтворення сигналу та оцінки його параметрів, які можна побачити у табл. 4.4.

Результуюча якість відтворення сигналу та його параметрів знову є кращою, ніж для стандартного методу.

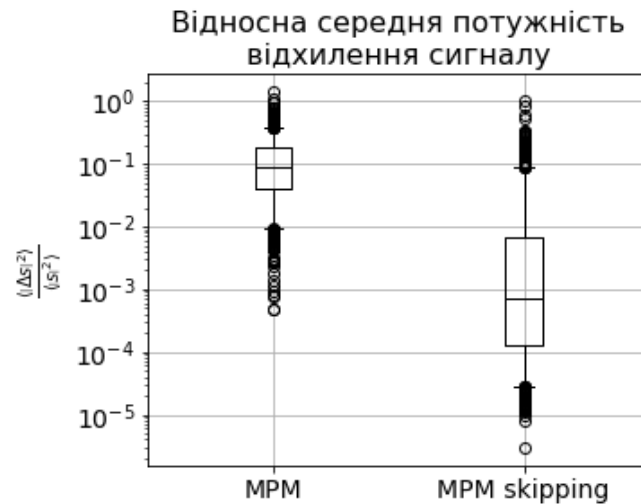


Рис. 4.27. Розподіл середньої потужності відхилення сигналу для випадку згасаючих компонент

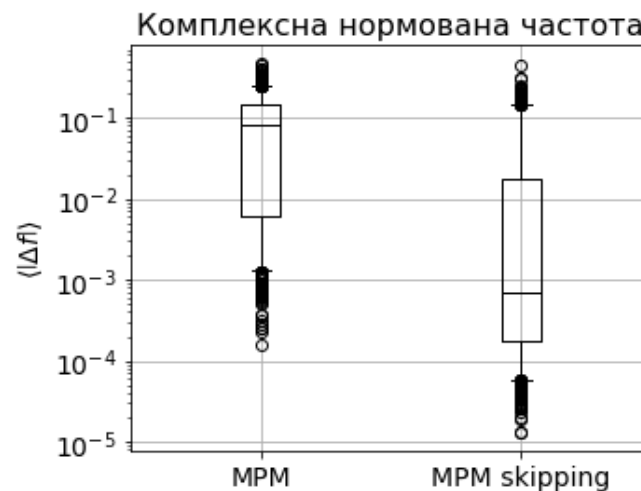


Рис. 4.28. Розподіл модуля відхилення нормованої комплексної частоти для випадку згасаючих компонент

Враховуючи лімітованість порядку методу, що диктується кількістю точок, які необхідно відкинути, було проведено ряд експериментів для порівняння якості відтворення сигналу та його параметрів стандартним методом та методом пропускання точок для випадку, коли порядок стандартного методу міг змінюватись у всьому можливому діапазоні, а порядок методу пропускання точок було встановлено на найбільшому рівні, що надавав достатньо запасу для відкидання всіх необхідних точок.

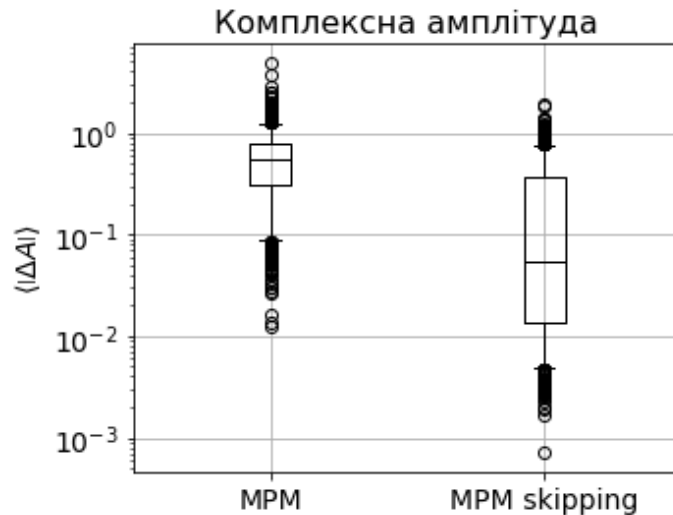


Рис. 4.29. Розподіл модуля відхилення комплексної амплітуди для випадку згасаючих компонент

Табл. 4.4. Порівняння результатів для затухаючого сигналу

Метод	$\langle\langle \Delta\underline{s} ^2\rangle\rangle$	$\text{med}\langle \Delta\underline{s} ^2\rangle$	$\langle \Delta\underline{f} \rangle$	$\text{med} \Delta\underline{f} $	$\langle \Delta\underline{A} \rangle$	$\text{med} \Delta\underline{A} $
Стандартний	0.13	0.089	0.091	0.0843	0.59	0.55
Модифікований	0.02	0.001	0.027	0.0007	0.22	0.05

Початковий експеримент знову було проведено для сигналу з незгасаючими компонентами. Як можна побачити на рис. 4.30, в певний момент якість обробки стандартним методом починає перевищувати якість обробки методом пропускання точок, проте, як показано на рис. 4.31, збільшення порядку стандартного методу швидко призводить до зростання часу розрахунку.

Можна показати, що значення порядку стандартного методу  $L = 50$  вимагає в середньому у 2.72 рази більше часу на проведення розрахунків.

Подібний експеримент було також повторено для сигналу зі згасанням. У даному випадку було продемонстровано, що метод пропускання точок зберігає перевагу над стандартним методом навіть за великих значень порядку  $L$  (рис. 4.32).

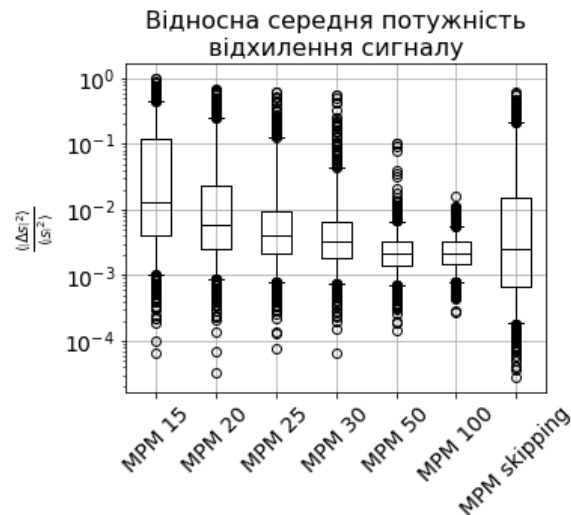


Рис. 4.30. Порівняння якості відтворення в залежності від порядку стандартного методу для сигналу без затухання

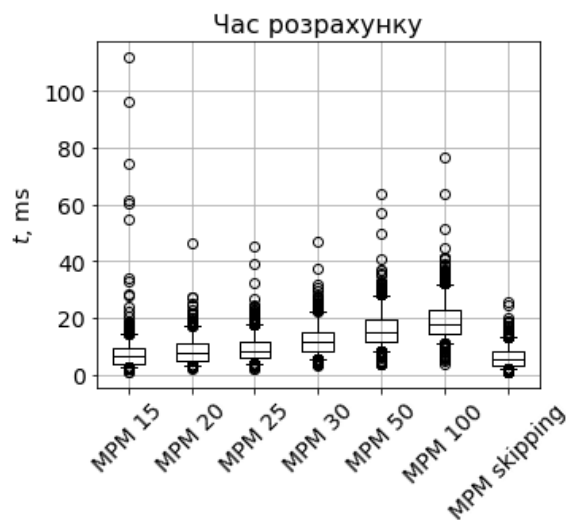


Рис. 4.31. Порівняння часу обробки сигналу

Даний факт пояснюється збільшенням відносної висоти піків для кінцевих секцій сигналу. При цьому застосування методу відкидання точок набуває кращих значень оцінок параметрів, оскільки характер компонент майже унеможливорює появу розбіжного розв'язку.

При цьому для часових характеристик розрахунку зберігається закономірність, аналогічна попередньому випадку.

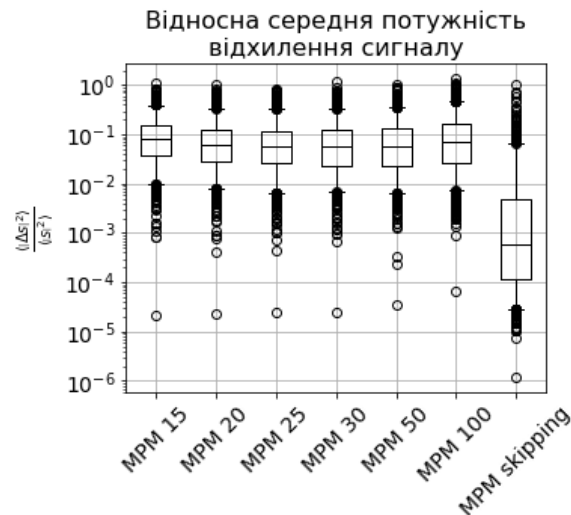


Рис. 4.32. Порівняння якості відтворення в залежності від порядку стандартного методу для сигналу зі згасанням

Було проведено аналогічні випробування із застосунком методу з автоматичним пошуком імпульсів. При цьому параметри генерації сигналу та шуму були аналогічними до наведених вище. Як можна побачити на рис. 4.33, метод автоматичного пошуку імпульсів для сигналу без згасання призвів до погіршення результату у порівнянні як з «ідеальним» методом пропускання точок, так і зі стандартними методами.

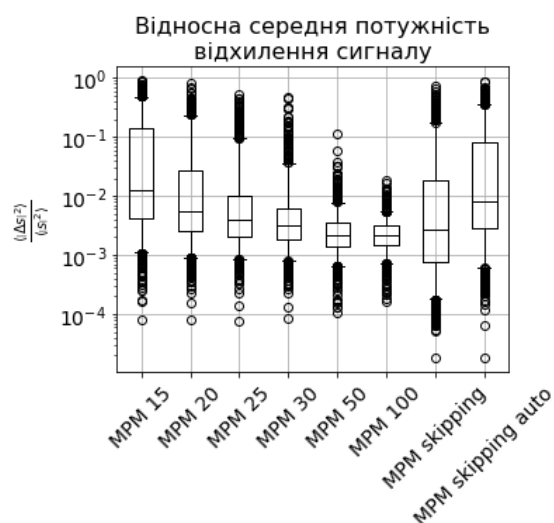


Рис. 4.33. Порівняння відхилення сигналу без згасання для стандартного методу, «ідеального» та автоматичного методу

Застосування методу автоматичного пошуку імпульсів до сигналу зі згасанням показало значно кращі результати із автоматичним методом, здатним до надання кращих результатів як за загальним відтворенням сигналу, так і за відтворенням значень його параметрів, як можна побачити на рис.4.34, 4.35 та 4.36.

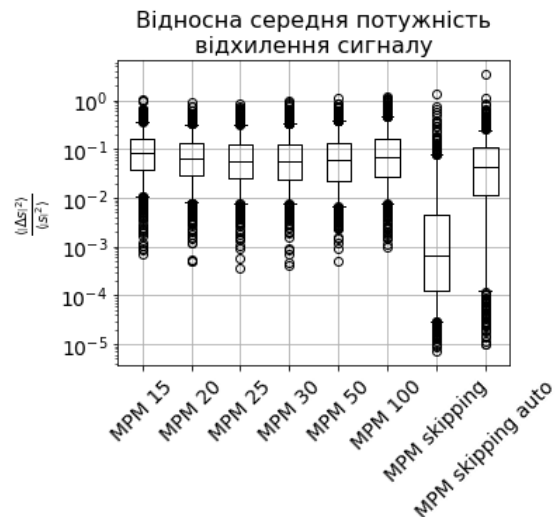


Рис. 4.34. Порівняння відхилення сигналу зі згасанням для стандартного методу, «ідеального» та автоматичного методу

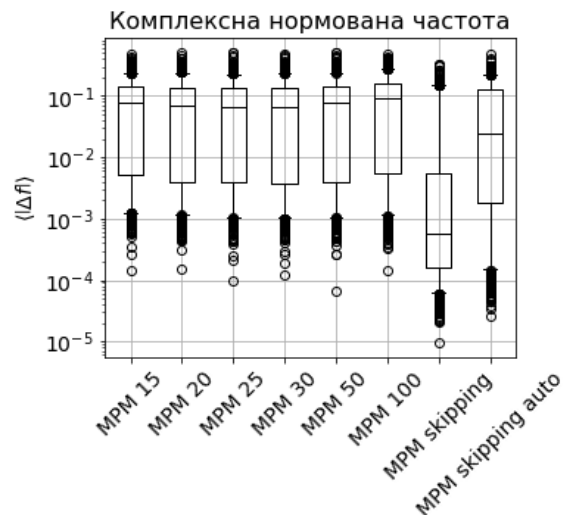


Рис. 4.35. Якість відтворення комплексної частоти для сигналу зі згасанням для стандартного методу, «ідеального» та автоматичного методу

При цьому метод з автоматичним пошуком імпульсних викидів був здатен обчислити параметри сигналу за час в 4 рази довший, ніж стандартний метод з оптимальною кількістю компонент. Даний результат можна вважати припустимим, оскільки він дає кращі оцінки. При цьому швидкість розрахунку у випадку, коли положення імпульсів є відомими, дозволяє зробити висновок про можливість значного покращення швидкості розрахунку за умови використання більш ефективних методів пошуку імпульсів.

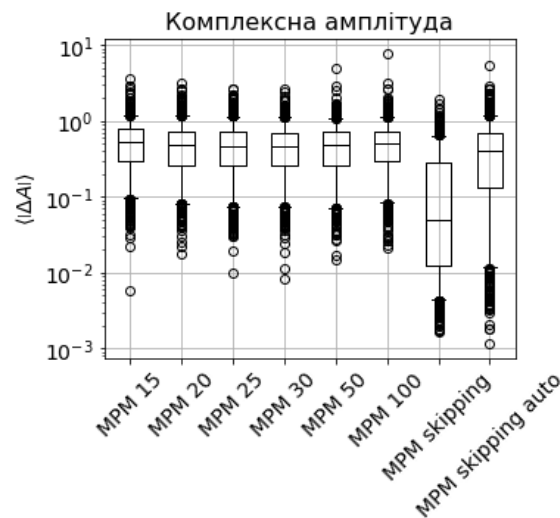


Рис. 4.36. Якість відтворення комплексної амплітуди для сигналу зі згасанням для стандартного методу, «ідеального» та автоматичного методу

Під час комп'ютерного експерименту було також розглянуто можливість застосування простого методу пошуку імпульсних викидів, заснованого на пошуку скінченних різниць. При цьому метод порівнювався зі звичайним методом пучка матриць з порядком  $L = 100$ , «ідеальним» методом відкидання точок та методом з пошуком імпульсів на основі узгодженої фільтрації. Як можна побачити на рис. 4.37, результати для даного методу є схожими на метод узгодженої фільтрації.

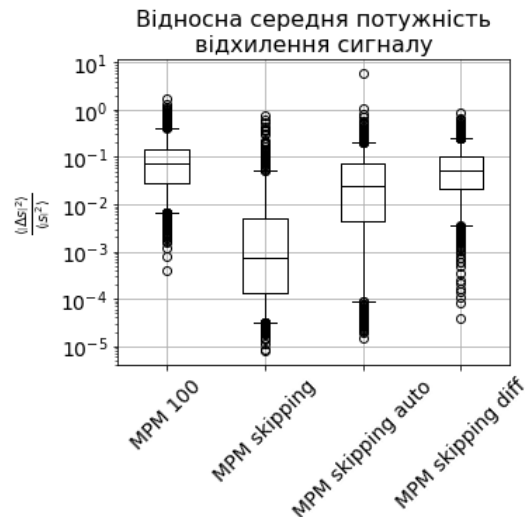


Рис. 4.37. Якість відтворення комплексної амплітуди для сигналу зі згасанням для стандартного методу, «ідеального» та автоматичних методів

#### 4.5 Пряме застосування методу коригування частот

Для тестування методу коригування частот для покращення якості оцінки параметрів сигналу було обрано сигнал типу

$$s_n = \sum_{m=1}^{0.5M} A_m e^{-\alpha_m n \Delta t} \cos(2\pi f_m n \Delta t + \varphi_m),$$

де  $\varphi_m$  – початкове значення фази компоненти сигналу.

Напочатку спотворений сигнал було отримано шляхом додавання білого шуму до наперед відомих ідеальних значень частоти сигналу. При цьому стандартне відхилення нормованої частоти змінювалося від 0 до 0.1. Завдяки тому що нормована частота використовується у показнику комплексної експоненти, значення, більші за 0.5 та менші за -0.5, автоматично перетворювались на такі, що є допустимими внаслідок явища фолдингу. Сигнал також було спотворено шляхом додавання білого Гауссівського шуму з відношенням сигналу до шуму  $SNR = 30$  дБ. Результати даного тестування можна побачити на рис. 4.38 та 4.39.



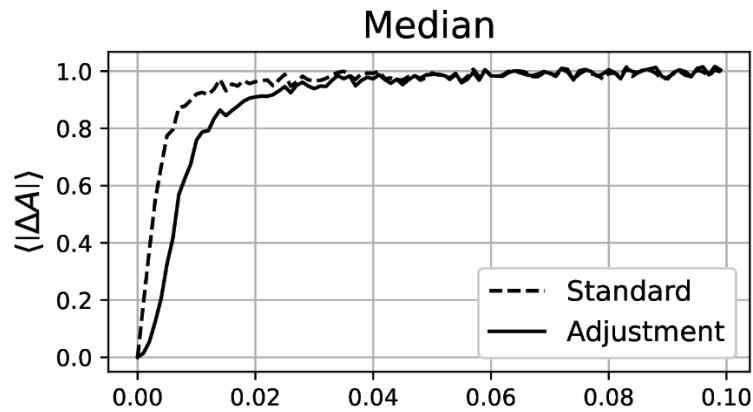


Рис. 4.38. Залежність медіанного модуля відхилення оцінки амплітуди від стандартного відхилення шуму частоти

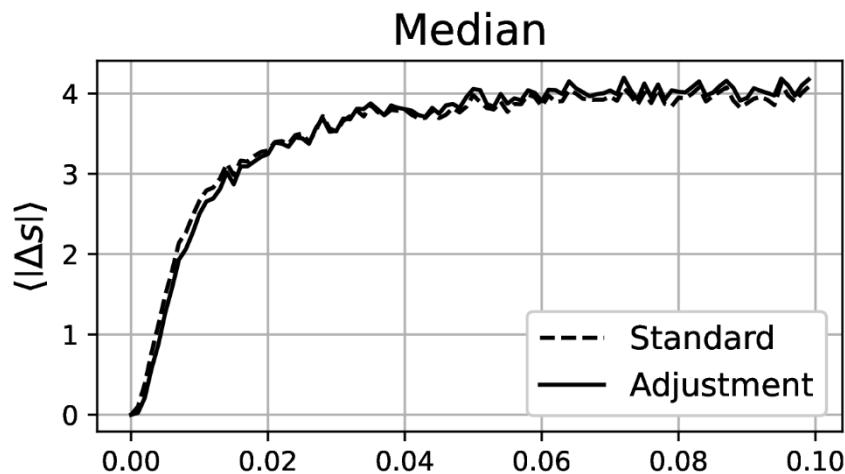


Рис. 4.39. Залежність медіанного значення середньоквадратичного відхилення відтворення сигналу від стандартного відхилення шуму частоти

Як можна побачити із зображень, застосування запропонованого методу дозволяє покращити якість оцінки сигналу.

При подальших випробуваннях початкова оцінка частот сигналу проводилась шляхом застосування методу Проні та методу пучка матриць. Дані випробування проводились спочатку для моночастотного сигналу в діапазоні нормованих частот від 0.01 до 0.49 з кроком 0.01 з метою покриття якомога ширшої частини інтервалу можливих частот. Для кожної нормованої частоти експеримент було реалізовано 1000 разів. При цьому до сигналу додавався білий

шум з  $SNR = 30$  дБ. Як можна побачити на рис. 4.40, метод дозволяє значно покращити якість оцінки комплексної амплітуди.

Важливо зазначити, що в даному випадку метод Проні з коригуванням частоти зміг по якості оцінки перевищити стандартний метод пучка матриць.

Як можна побачити на рис. 4.41, метод коригування частоти дозволяє також покращити загальну якість відтворення сигналу.

При подальшому тестуванні експерименти проводились над сигналом з  $M = 4$ . При цьому комплексні нормовані частоти та комплексні амплітуди генерувались випадково. Дійсна частина згенерованих нормованих частот обиралася з діапазону від 0.01 до 0.49 з мінімальною відстанню між частотами компонент одного сигналу 0.05.

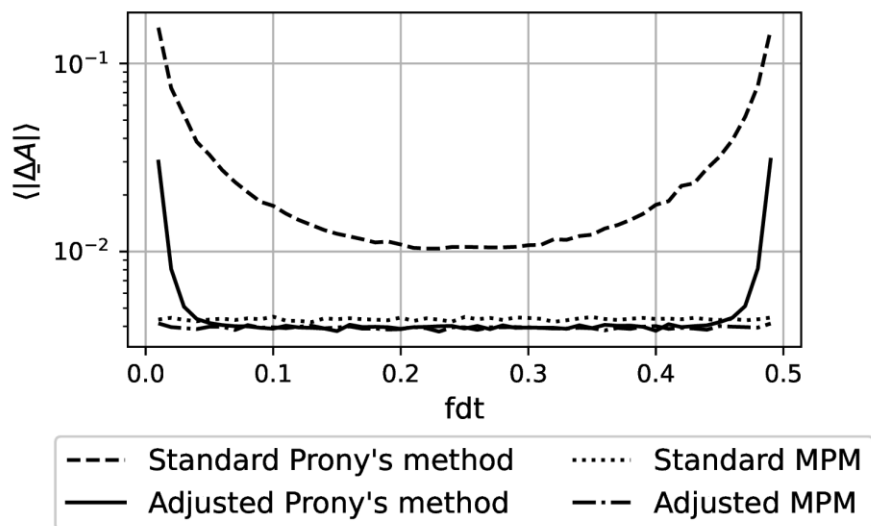


Рис. 4.40. Залежність середнього відхилення комплексної амплітуди від нормованої частоти

Уявна частина нормованої комплексної частоти обиралась в межах від 0 до такої, що призводить до зменшення амплітуди компоненти в 10 разів між початком та кінцем сигналу. Абсолютні значення комплексних амплітуд обирались із діапазону від 0.5 до 1.5, а початкова фаза обиралась зі значень від 0 до  $2\pi$ .

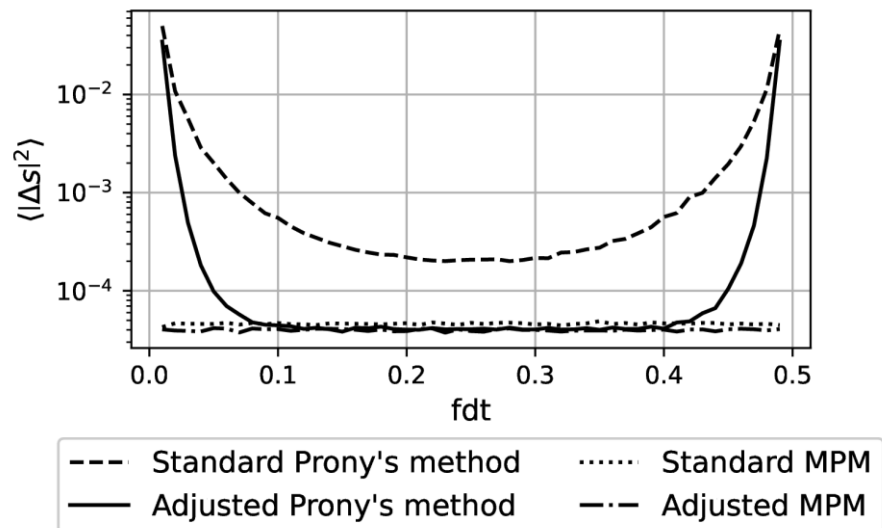


Рис. 4.41. Залежність середнього середньоквадратичного відхилення відтворення сигналу від нормованої частоти

Як можна побачити на рис. 4.42, результати, отримані при аналізі моночастотного сигналу, зберігаються і для багаточастотної послідовності.

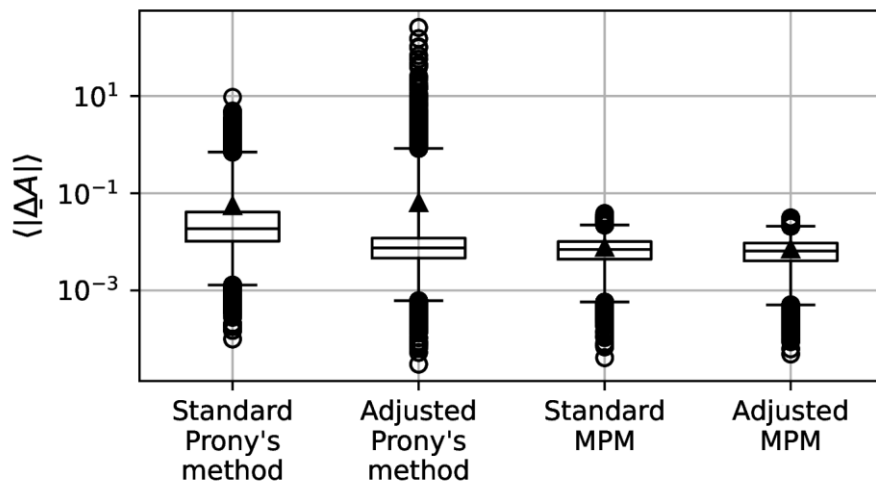


Рис. 4.42. Результати стохастичного тестування для відхилення оцінки комплексної амплітуди. Між «вусами» знаходиться 99 % значень

Результати оцінки точності відтворення сигналу можна побачити на рис. 4.43.

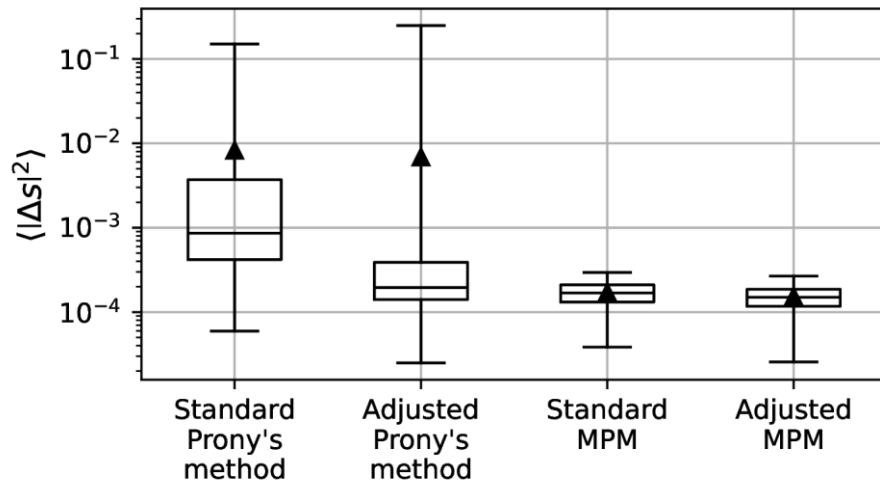


Рис. 4.43. Результати стохастичного тестування для середньоквадратичного відхилення відтвореного сигналу. Між «вусами» знаходиться 95 % значень.

Інші значення для всіх методів були відкинуті з розрахунку

Для кращої оцінки частотних меж застосовності методу експеримент з випадковими значеннями параметрів було повторено для сигналів з вузькими допустимими межами частот. При цьому значення синусоїдальних компонент було зменшено до 2, оскільки в іншому випадку близькість частот компонент починала впливати на якість аналізу. Результати даного експерименту можна побачити на рис. 4.44 та 4.45.

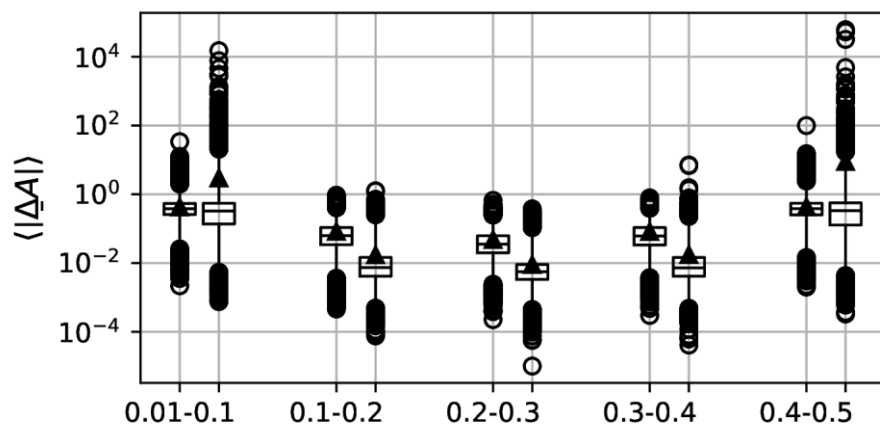


Рис. 4.44. Розподіл якості оцінки комплексних амплітуд для різних діапазонів частот. Між «вусами» лежить 99 % значень

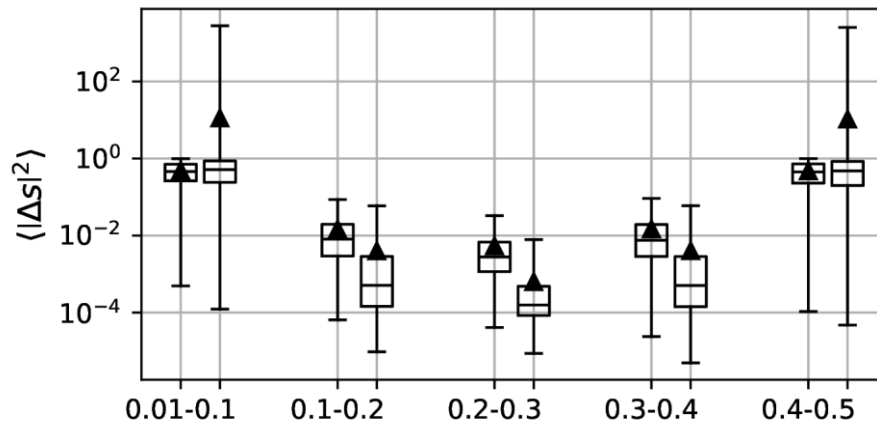


Рис. 4.45. Розподіл якості відтворення сигналу для різних діапазонів частот.

Між «вусами» лежить 99 % значень

Як можна побачити, найкраща якість оцінки знову була отримана для сигналів з нормованими частотами близькими до 0.25.

Варто також зауважити, що при роботі з цими центральними частотами частота появи реалізацій шуму, що призводила до хибної роботи методу, значно зменшувалась (з 880 на 10000 біля нуля та частоти Найквіста до 0 на 10000 в центрі).

#### 4.6 Застосування методу коригування частот до вимірювання відстаней у мікрохвильовому діапазоні

Метод коригування частот було модифіковано для застосування у випадках вимірювання значення комплексного коефіцієнта відбиття методом багатозондової лінії.

Розглянемо випадок хвильоводної лінії з єдиною неоднорідністю. Сигнал (1.4) відповідає комплексно-експоненціальній моделі, отже, може бути аналізований методами параметричного спектрального аналізу.

У випадку багатозондового вимірювання коефіцієнта відбиття міжзондова відстань  $\Delta l$  вважається відомою. При цьому, внаслідок неточності виробництва, виставлення відстаней, температурного розширення, вібрацій та інших подібних ефектів істинне значення кроку може відрізнятись від виставленого.

Використання методів на кшталт методу Проні або методу пучка матриць не потребує інформації про крок, оскільки значення  $\beta\Delta l$  при цьому оцінюється автоматично в ході розрахунку. Недоліком застосування даних методів в цьому випадку є значна кількість розрахунків, що призводить до підвищеної потреби до часу та комп'ютерного ресурсу. Оскільки початкове наближення  $\beta\Delta l$  є відомим, автором було запропоновано застосувати його разом з модифікованим методом корекції частот для покращення часових характеристик обробки сигналу.

Для обробки сигналу в даному випадку було застосовано метод корекції частот з різницевою фільтрацією і схемою розкладання в ряд експоненціальної частини. При цьому для оцінки параметрів сигналу розв'язувалась система

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ z^{-2} & z^2 & 2jz^{-2} & 2jz^2 \\ z^{-4} & z^4 & 4jz^{-4} & 4jz^4 \\ z^{-6} & z^6 & 6jz^{-6} & 6jz^6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{A} \\ \underline{A}^* \\ \underline{\alpha_1} \\ \underline{\alpha_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{s}_0 \\ \hat{s}_1 \\ \hat{s}_2 \\ \hat{s}_3 \end{pmatrix}.$$

Значення  $\underline{A}$  далі перераховується в значення  $\underline{\Gamma}_0$ .

Для оцінки якості роботи даного методу його було порівняно зі стандартним підходом на основі Фур'є-аналізу, двохзондовим підходом та підходом на основі методу Проні (рис. 4.46, 4.47).

У якості реалізації двохзондового підходу було обрано підхід поданий в [15], [36]. Оскільки коефіцієнт відбиття являє собою єдине комплексне число, для його оцінки повинно вистачати двох значень вимірювань у вигляді дійсних чисел. Для випадку  $\Delta l = \frac{\Lambda}{8}$ , розглянутому в даній роботі, показано, що оцінку комплексного коефіцієнта відбиття можна отримати як

$$\Gamma_{\pm} = \left\{ \frac{A_1 + A_2 + 2}{2} \pm \sqrt{\frac{(A_1 + A_2 + 2)^2}{4} - \frac{A_1^2 + A_2^2}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (4.2)$$

$$\cos \varphi = \frac{A_1 - \Gamma^2}{2\Gamma},$$

$$\sin \varphi = \frac{A_2 - \Gamma^2}{2\Gamma},$$

де  $\Gamma = |\underline{\Gamma}|$ ,  $\varphi = \arg \underline{\Gamma}$ ,

$$A_1 = J_1 - 1,$$

$$A_2 = J_2 - 1,$$

$J_{1,2}$  – сигнал на діодах, що є пропорційним квадрату напруженості поля в хвилеводі.

При цьому слід зазначити, що (4.2) завжди надає два можливих значення модуля, один з яких обов'язково є таким, що не відповідає дійсності. Через це на корінь даного рівняння накладається умова

$$\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \geq -\frac{1}{\sqrt{2}\Gamma}, \quad (4.3)$$

при виконанні якої в якості оцінки береться  $\Gamma_-$ , а при невиконанні –  $\Gamma_+$ .

При цьому значення  $\Gamma$  в (4.3) є значенням істинної амплітуди коефіцієнта відбиття, яка має бути оцінена заздалегідь. Даний факт зазвичай не є критичним, оскільки за значень  $\Gamma \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  умова (4.3) виконується завжди, а значення амплітуди коефіцієнта відбиття при реальних радарних вимірюваннях нечасто набувають великих значень.

Як можна побачити, метод Проні в даному випадку дає найкращий результат, проте метод корекції частот також надає значного покращення наближення у вузькій зоні навколо початкового наближення  $\beta\Delta l$ . Даний факт є

важливим, оскільки розрахунок за методом корекції частот є менш вибагливим до комп'ютерних ресурсів, ніж метод Проні.

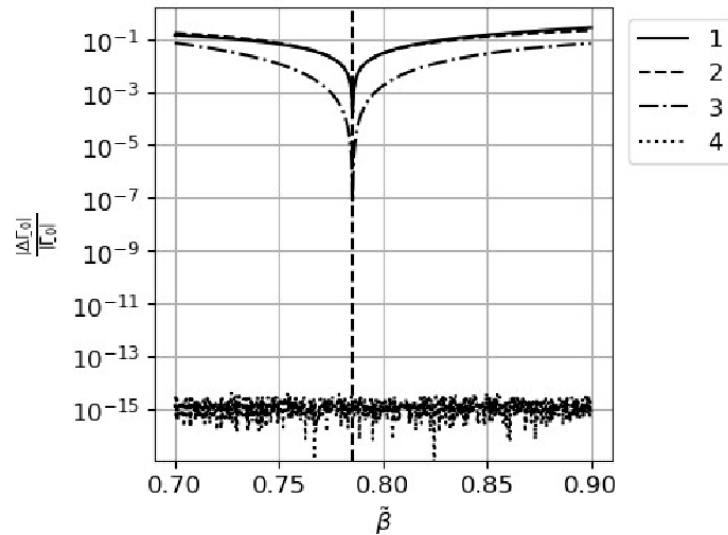


Рис. 4.46. Залежність модуля відносного відхилення комплексного коефіцієнта відбиття від значення  $\beta\Delta l$ . 1 – метод ДПФ, 2 – двохзондовий метод, 3 – метод корекції  $\tilde{\beta}$ , 4 – метод Проні

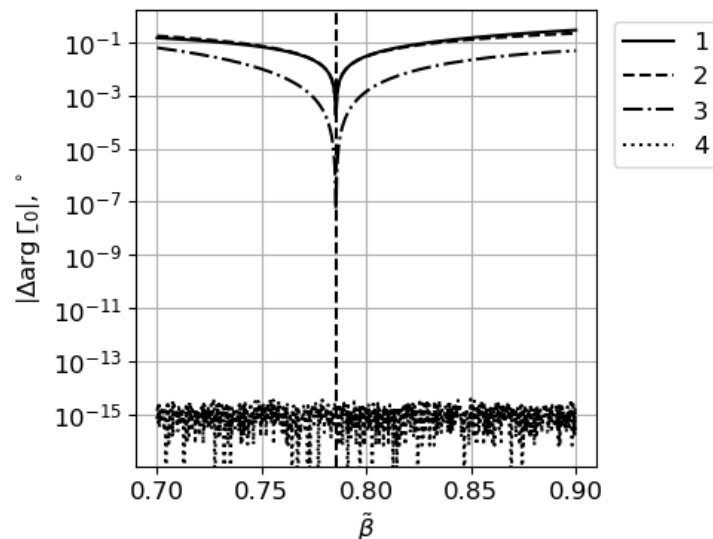


Рис. 4.47. Залежність модуля відхилення фази комплексного коефіцієнта відбиття від значення  $\beta\Delta l$ . 1 – метод ДПФ, 2 – двохзондовий метод, 3 – метод корекції  $\tilde{\beta}$ , 4 – метод Проні



Наступним кроком випробувань було тестування на сигналі без додаткового шуму вимірювань. При цьому дистанція між зондами варіювалась за Гауссівським законом зі значенням стандартного відхилення  $\sigma_{\Delta l} = \Delta l \alpha \Delta T \approx 2.1 \cdot 10^{-4}$  см, де  $\alpha \approx 19 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$  – коефіцієнт лінійного температурного розширення для латуні, а  $\Delta T = 30 \text{ K}$  – напівширина діапазону температур, в яких подібна хвильоводна структура може бути використана. Як можна побачити на рис. 4.48, метод коригування частот та метод Проні знову дають кращу оцінку, ніж стандартні методи.

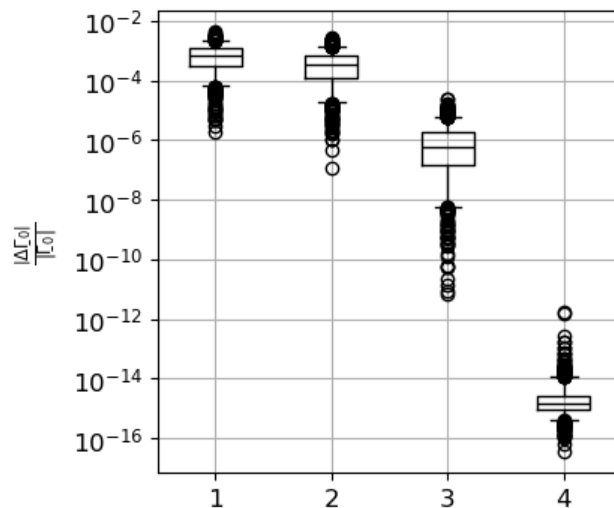


Рис. 4.48. Розподіл модуля відносного відхилення оцінки КВ для різних методів при відсутності адитивного білого шуму в сигналі. Значення «вусів» відповідають 5 та 95 процентилям розподілу. По осі абсцис 1 – метод ДПФ, 2 – двохзондовий метод, 3 – метод корекції  $\tilde{\beta}$ , 4 – метод Проні

На рис. 4.49 можна побачити, що якість оцінки фази КВ також відповідає зазначеній вище закономірності. В обох випадках важливо зазначити, що метод корекції  $\tilde{\beta}$  та метод Проні не мають значних викидів, що означає відсутність розподілів шуму, при яких методи перестають коректно працювати.

При цьому, як можна побачити в табл. 4.5, метод корекції частот надає значно більшу швидкість розрахунку, порівняну зі стандартними методами, що

робить його більш придатним для роботи в умовах де необхідна швидкодія у порівнянні з методом Проні.

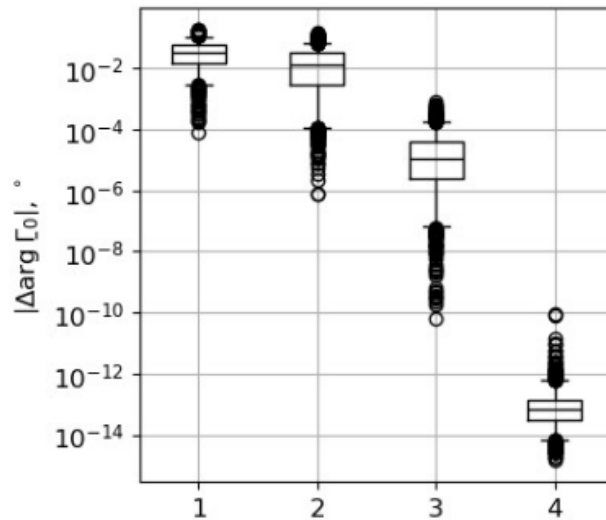


Рис. 4.49. Розподіл модуля відхилення оцінки фази КВ різних методів при відсутності адитивного білого шуму в сигналі. Значення «вусів» відповідають 5 та 95 процентилям розподілу. По осі абсцис 1 – метод ДПФ, 2 – двухзондовий метод, 3 – метод корекції  $\tilde{\beta}$ , 4 – метод Проні.

Табл. 4.5. Середня тривалість розрахунку для різних методів

Метод	Середня тривалість розрахунку, мс
Метод ДПФ	71
Двохзондовий метод	80
Метод корекції частот	97
Метод Проні	285

В подальшому було досліджено залежність якості оцінки загального значення комплексного коефіцієнта відбиття (рис. 4.50) та його фази (рис. 4.51) за умови наявності в сигналі білого шуму зі стандартним значенням  $\text{SNR} = 30$  дБ.

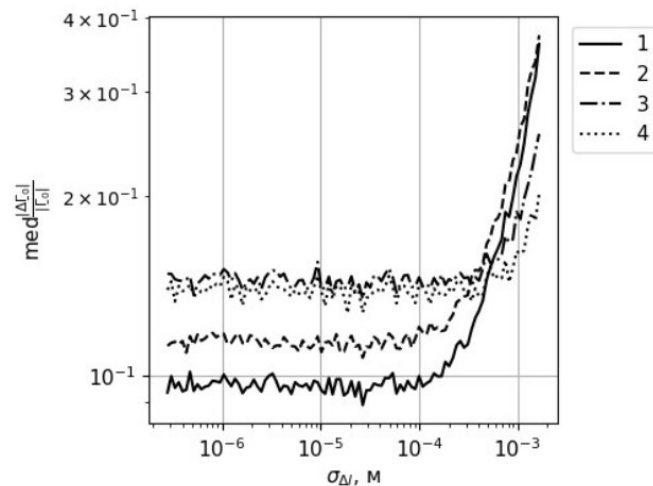


Рис. 4.50. Залежність медіанного значення відносної похибки оцінки комплексного коефіцієнта відбиття від похибки розташування зондів. 1 – метод ДПФ, 2 – двохзондовий метод, 3 – метод корекції  $\tilde{\beta}$ , 4 – метод Проні

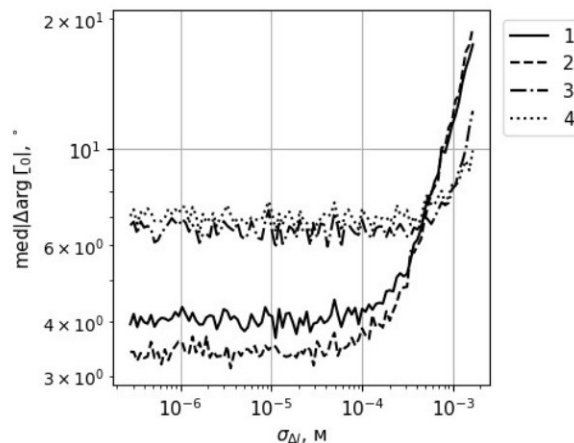


Рис. 4.51. Залежність медіанного значення похибки оцінки фази комплексного коефіцієнта відбиття від похибки розташування зондів. 1 – метод ДПФ, 2 – двохзондовий метод, 3 – метод корекції  $\tilde{\beta}$ , 4 – метод Проні

Як можна побачити, запропоновані методи починають давати кращі результати починаючи зі значення стандартного відхилення розташування зондів, що дорівнює  $3 \cdot 10^{-4}$  м.

З метою більш детального дослідження меж застосовності методу корекції частот та методу Проні для аналізу сигналів багатозондового вимірювання було проведено експеримент, під час якого для кожної комбінації стандартного

відхилення значення  $\beta\Delta l$  та SNR адитивного білого шуму було обрано найкращий метод для оцінки фази комплексного коефіцієнта відбиття (рис. 4.52).

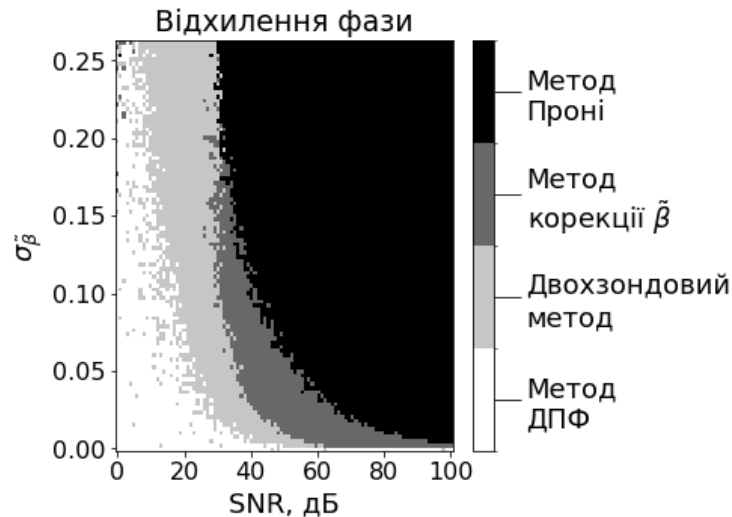


Рис. 4.52. Мапа залежності найкращого методу від комбінації дисперсії відхилення нормованого коефіцієнту поширення та SNR на основі медіанного відхилення фази

Як можна побачити, метод корекції частот здатен надавати найкращі результати оцінки фази при певних комбінаціях параметрів. При цьому межі застосування методу корекції частот відповідають стандартному відхиленню похибки кроку встановлення зондів  $\sigma_{\Delta l} \approx 0.63$  мм або похибки налаштування частоти генератора  $\sigma_f \approx 0.7$  ГГц. Обидва з цих значень є цілком досяжними для сучасних вимірювальних систем, що робить даний метод доцільним для використання.

Окрім цього, було проведено дослідження щодо найкращого стандартного методу для аналогічного діапазону шуму та відхилення нормованого коефіцієнту поширення (рис. 4.53).

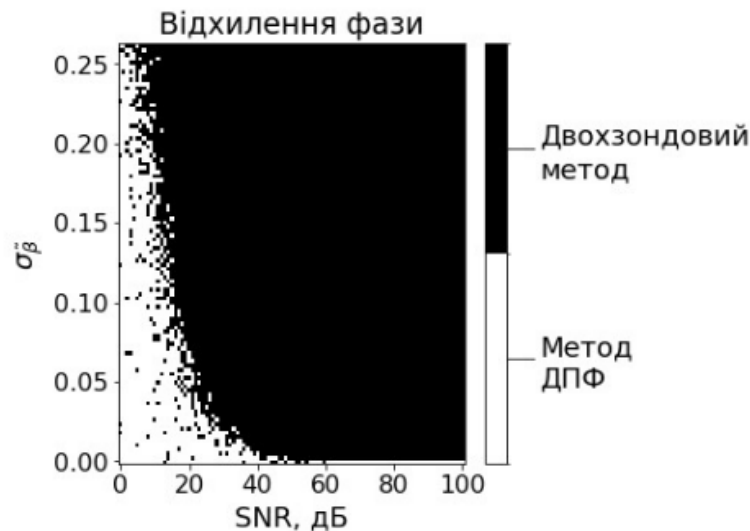


Рис. 4.53. Мапа залежності найкращого класичного методу від комбінації дисперсії відхилення нормованого коефіцієнту поширення та SNR на основі медіанного відхилення фази

Для порівняння результативності методів було побудовано мапи залежності середнього значення відхилення для класичних та запропонованих методів (рис. 4.54, рис. 4.55). Як можна побачити, застосування запропонованих методів здатне покращити якість оцінки в зонах їх застосовності на порядок.

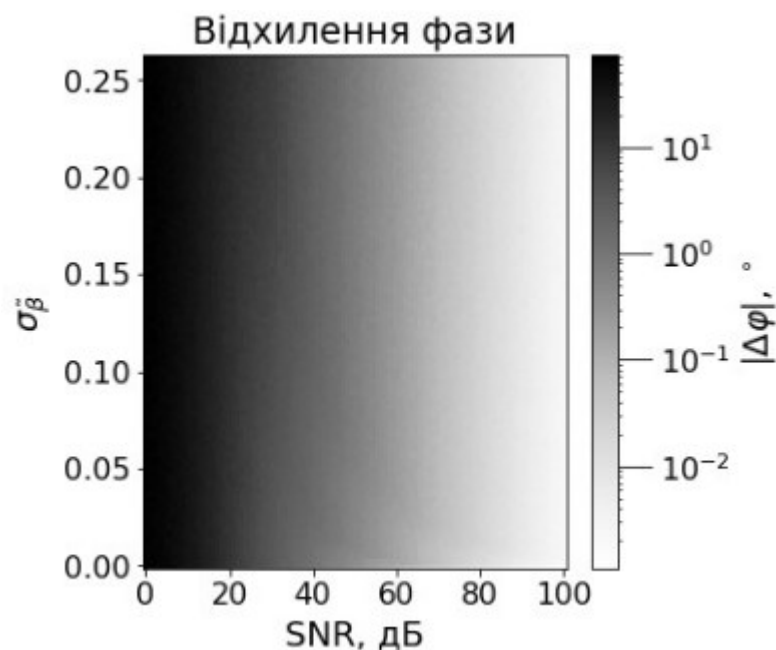


Рис. 4.54. Мапа залежності відхилення оцінки фази для найкращого з запропонованих та класичних методів в даній точці

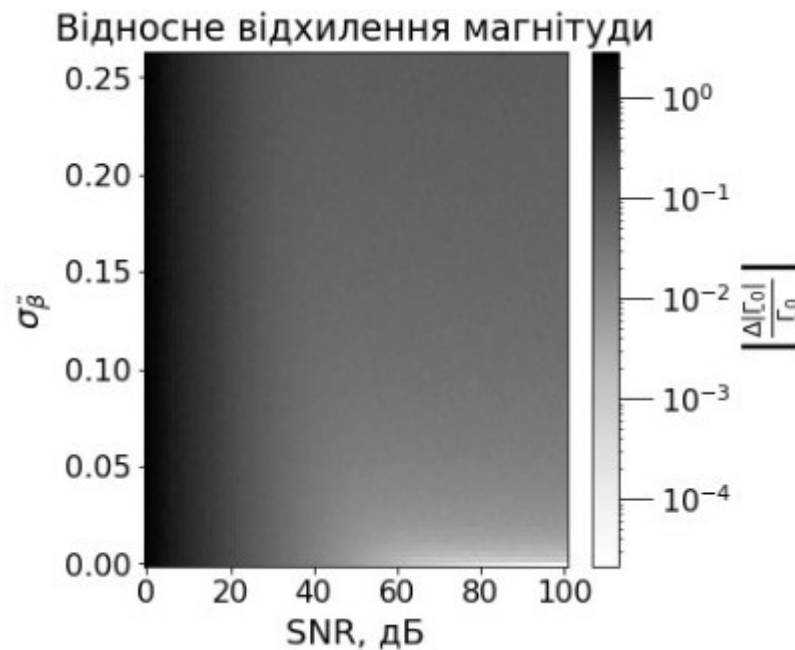


Рис. 4.55. Мапа залежності відхилення оцінки фази для найкращого з класичних методів в даній точці

Для додаткової перевірки працездатності методу було проведено експеримент з оцінки відносного положення відбивача за умови наявності вібрацій в хвильовдній системі. При цьому відстані між зондами змінювались за гармонічним законом з такою амплітудою, що  $\beta \Delta l = 0.08$ . Окрім цього в системі був присутній адитивний білий шум на рівні 40 дБ, що відповідає сучасним малошумливим приладам. Амплітуда осциляції відбивача складала  $0.2\lambda = 6$  мм. Результати даного випробування можна побачити у табл. 4.6.

Табл. 4.6. Результати комп'ютерного експерименту із вібраціями

Метод	Середнєквадратичне відхилення, мм	Медіанне відхилення, мм
Метод ДПФ	0,41	0,300
Двохзондовий метод	0,21	0,110
Метод корекції $\tilde{\beta}$	0,11	0,070
Метод Проні	0,95	0,079

Як можна побачити, метод корекції частот в даному випадку був здатен надати точніші оцінки положення відбивача, ніж метод Проні, оскільки останній є більш чутливим до шумів у сигналі за малої кількості точок.

#### 4.7 Застосування методів параметричного спектрального аналізу для обробки сигналу реального фронтенду

Параметричні методи спектрального аналізу також були застосовані для оцінки фази коефіцієнта відбиття на основі моделювання реальної вимірювальної системи. Як можна побачити на рис. 4.56, в даному випадку застосування дискретного перетворення Фур'є не дозволяє отримати точну оцінку розташування неоднорідності.

З метою покращення відповідності сигналу до очікуваної моделі для одиничного відбивача сигнал було оброблено за допомогою лінійної апроксимації з метою віднімання лінії тренду (рис. 4.57).

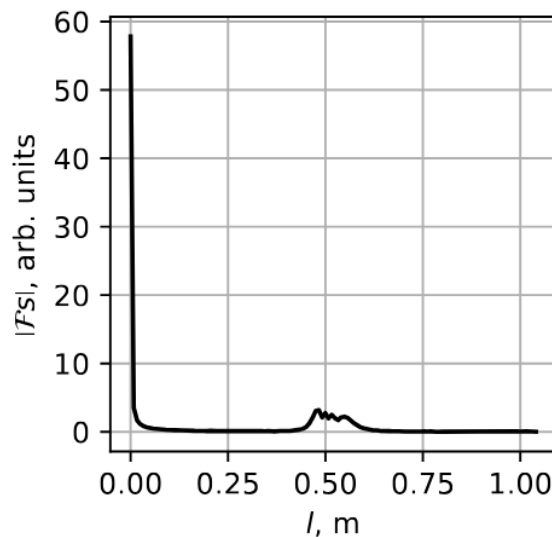


Рис. 4.56. ДПФ сигналу, що було отримано за допомогою симуляції реального вимірювального тракту

Після застосування даної процедури сигнал було оброблено за допомогою фільтра Гільберта з метою виділення його обвідної [152] та поточкового ділення на неї вихідного сигналу.

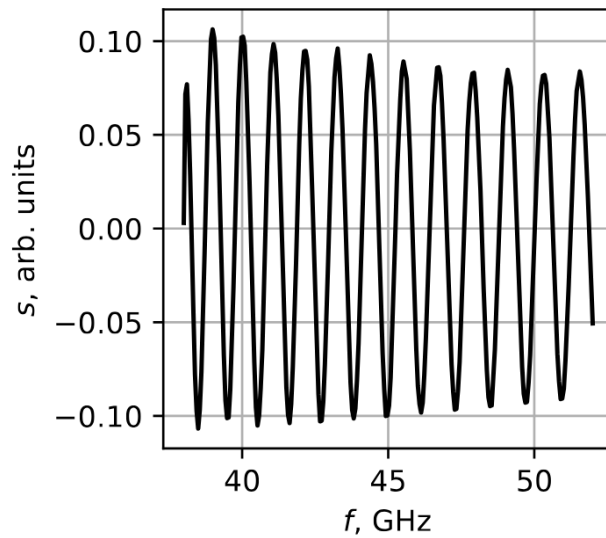


Рис. 4.57. Сигнал після віднімання лінії тренду

Як можна побачити на рис. 4.58, застосування даних методів дозволило наблизити форму сигналу до необхідної для аналізу за допомогою параметричних методів.

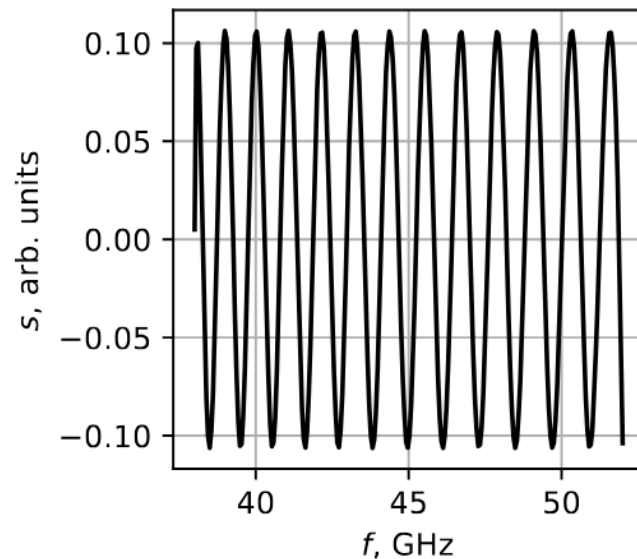


Рис. 4.58. Сигнал після процедури препроцесингу

Результуючий сигнал було проаналізовано для різних відстаней до відбивача за допомогою методу Проні та МПМ з порядками моделі  $M = 3$  та  $M = 2$ . При цьому оцінювалось середнє значення відносного відхилення оцінки



відстані для відстаней в межах від 0.1 м до 1 м з кроком 0.1 м. Як можна побачити на табл. 4.7, застосування повної процедури препроцесингу дозволяє в значній мірі покращити результати обробки за допомогою методу Проні.

Табл. 4.7.

	Проні $M = 3$	Проні $M = 2$	МПМ $M = 3$	МПМ $M = 2$
Чистий	0.0221	—	0.0226	—
Тренд	0.0195	0.0230	0.0223	0.0226
Гільберт	0.0180	0.0183	0.0244	0.0243

В подальшому результати симуляції було застосовано для перевірки можливості обробки сигналу багатозондового вимірювача за допомогою методу Проні. При цьому випробування проводились для повного діапазону частот аналогічного до частот, застосованих для однозондового методу та для діапазону магнітуд коефіцієнтів відбиття в межах від 0.05 до 1 з кроком 0.05. Значення фази коефіцієнту відбиття при цьому задавались в межах від 0 до  $\pi$  на 10 еквідистантних точках. При цьому відстань між діодами було встановлено у відповідності до  $\Lambda/10$  для хвилі з найбільшою частотою з метою недопущення виникнення ефекту аліасингу.

Як можна побачити на рис. 4.59, метод Проні здатен з високою точністю оцінювати значення фази комплексного коефіцієнту відбиття для високих частот та для низьких за умови того, що магнітуда коефіцієнта відбиття має значення близькі до 0.35, що відповідає очікуванням.

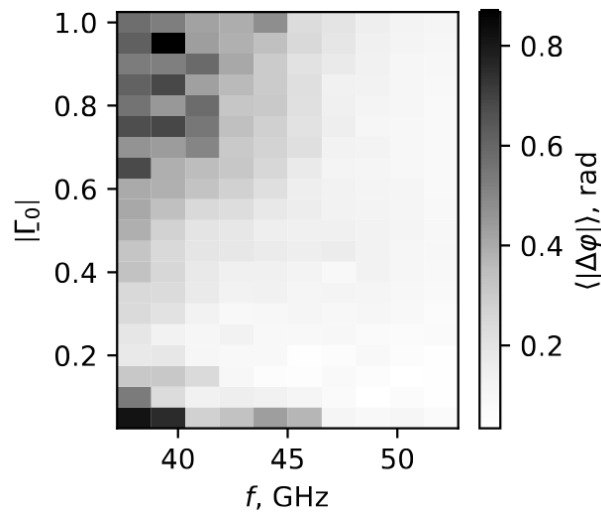


Рис. 4.59. Залежність середньої похибки оцінки фази комплексного коефіцієнта відбиття від його магнітуди та частоти падаючої хвилі

#### 4.8 Висновки

1. Метод допоміжних джерел дозволяє отримувати високоякісні оцінки електромагнітного поля для задач поширення електромагнітних хвиль у хвилеводних структурах. Застосування модифікованого вікна Хемінга в якості збуджуючого імпульсу дозволяє отримати результати, що відповідають теоретично очікуваним. Даний підхід було в подальшому застосовано для перевірки працездатності розроблених алгоритмів.
2. Навіть у стандартній формі методи параметричного спектрального аналізу здатні надавати кращі оцінки різниці поздовжньої відстані за стандартний метод дискретного перетворення Фур'є.
3. Метод сегментування здатен покращити якість результатів оцінок параметрів за допомогою МПМ. При цьому важливим є правильний вибір критерію якості сегменту. Покращення якості оцінки досягається при цьому як для моно- так і для багаточастотного сигналу.
4. Підхід відкидання точок для методу Проні дозволяє значно покращувати якість оцінки параметрів сигналу у випадках наявності імпульсного шуму.

Особливо значного покращення якості оцінок можна досягнути у випадку відомих положень імпульсів.

5. Метод пропускання точок здатен покращити якість оцінки поздовжньої відстані за допомогою багаточастотного радарного сканування в умовах наявності імпульсного шуму.
6. Метод пропускання точок також дозволяє покращувати оцінки параметрів сигналу за допомогою МПМ. Внаслідок значного покращення якості оцінки параметр методу може бути зменшеним, що призводить до значного прискорення розрахунків. Даний факт дозволяє ефективно використовувати метод з багаторазовим обчисленням для оцінки положень імпульсних викидів.
7. Підхід коригування частот дозволяє покращити якість оцінки параметрів сигналу для методу Проні та МПМ. При цьому якість оцінки методом Проні може досягати якості, аналогічній стандартному методу пучка матриць. Як і для стандартних реалізацій методів, найкращі оцінки було отримано для сигналів із нормованими частотами близькими до 0.25.
8. Метод коригування частот є доцільним для покращення оцінок фази комплексного коефіцієнта відбиття та відповідного просторового зсуву в умовах вібрацій та термічного розширення.
9. Методи параметричного спектрального аналізу дозволяють ефективно аналізувати сигнали, отримані для однієї неоднорідності, за допомогою багаточастотного методу за умови застосування процедури препроцесингу.
10. Методи параметричного спектрального аналізу дозволяють ефективно аналізувати значення фази комплексного коефіцієнта відбиття, отримані за допомогою багатозондового методу в широкому діапазоні частот за умови середніх значень його магнітуди.

## ВИСНОВКИ

1. Був створений і програмно реалізований алгоритм формування імпульсної завади, який відповідає за своїми властивостями завадам, що спостерігаються в реальному експерименті. Наявність імпульсної завади викликає відповідні відхилення в оцінках параметрів експоненціальних моделей, які не можуть бути подолані стандартними алгоритмами реалізації методів параметричного спектрального аналізу, зокрема методів Проні та МПМ.
2. На основі пакету NGSpice із застосуванням мови Python 3.12 побудований програмний комплекс для симуляції роботи діодного детектора та аналогово-цифрового перетворювача у складі багатозондового вимірювача комплексного коефіцієнту відбиття в мікрохвильовому діапазоні, який коректно відображає особливості отримання корисного сигналу в реальній апаратурі.
3. Застосування міри відхилення сигналів на основі принципу мінімуму протяжності є найбільш доцільним для аналізу відповідності відтвореного сигналу початковому за умови його спотворення імпульсними викидами.
4. Багаторазова оцінка відхилення сигналу із застосуванням міри, яка сформована на основі принципу мінімуму протяжності, дозволяє автоматично коректно ідентифікувати положення імпульсних викидів у сигналі.
5. На основі методу допоміжних джерел алгоритмічно і програмно створений пакет для симуляції електромагнітних полів у хвильоводно-рупорних структурах у складі багаточастотного радарного вимірювального комплексу. Досягнений високий ступінь відповідності результатів симуляції експериментальним даним, що було отримано в реальних лабораторних умовах.
6. Знайшов подальшого розвитку метод сегментації у застосуванні до методів Проні та пучка матриць. Було успішно продемонстровано покращення

якості оцінки апроксиманти сигналу та його параметрів за умови належного підбору сталих методу. Було показано що дані сталі можуть бути знайдені методом детермінованого локального пошуку.

7. Алгоритмічно і програмно реалізований підхід на основі пропускання відліків, які спотворені шумом, що дозволяє значно покращити якість оцінки параметрів сигналу у вигляді суми зважених експоненціальних компонент за допомогою методу Проні в умовах наявності суміші адитивного білого Гауссівського та імпульсного шуму.
8. Алгоритмічно і програмно реалізований підхід на основі пропускання відліків, які спотворені шумом, що дозволяє значно покращити якість оцінки параметрів сигналу у вигляді суми зважених експоненціальних компонент за допомогою методу пучка матриць в умовах наявності суміші адитивного білого Гауссівського та імпульсного шуму.
9. Доля точок, які можна відкинути під час аналізу сигналу із застосуванням алгоритму пропускання точок для методу Проні та МПМ, становить близько 5%, що є прийнятним для розглянутих параметрів експериментальних установок.
10. Алгоритм коригування частот дозволяє покращити якість оцінки апроксиманти сигналу та його параметрів як для первісного сигналу, так і для сигналу, що пройшов через різницевий фільтр.
11. Алгоритми, розвинуті та розроблені під час дисертаційного дослідження, значно покращують результати оцінок для симульованих ситуацій, які відповідають реальним вимірювальним установкам.
12. На основі обробки даних симуляції електромагнітних полів у багатозондовій лінії знайшла підтвердження можливість уточнення результатів вимірювання значень комплексного коефіцієнта відбиття на багатьох частотах на основі методу корекції показників експонент.
13. На основі обробки даних симуляції електромагнітних полів у хвилеводно-рупорних структурах рефлектометричної схеми у складі багаточастотного радарного вимірювального комплексу із застосуванням принципу Фур'є-

голографії підтверджена можливість покращення результатів синтезування часових сигналів і інверсного синтезування апертури в проміжній зоні випромінювання шляхом використання покращених методів цифрового параметричного спектрального аналізу.

## СПИСОК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

- [1] M. M. Xu, L. Y. Xiao and H. F. Wang “A prony-based method of locating short-circuit fault in DC distribution system,” in *2nd IET Renewable Power Generation Conf. (RPG 2013)*, 2013, pp. 2.B30.
- [2] M. M. Tawfik and M. M. Morcos, “On the use of Prony method to locate faults in loop systems by utilizing modal parameters of fault current,” *IEEE Trans. Power Deliv*, vol. 20, no. 1, pp. 532–534, 2005.
- [3] F. F. Costa, D. A. Fernandes, L. A. L. de Almeida and S. R. Naidu, “Prony’s method versus FFT for analyzing power converters signals,” in *2005 European Conf. on Power Electronics and Applications*, 2005. pp. 9 pp.–P.9.
- [4] S. Goolak, O. Gubarevych, V. Yurchenko, O. Pohosov and V. Savyk, “Eccentricity monitoring in induction traction motors of railway rolling stock using the Prony method,” *Diagnostyka*, vol. 26, no. 4, pp. 2025412, 2025, doi: 10.29354/diag/214932.
- [5] N. H. Younan and C. D. Taylor “On using the SVD-Prony method to extract poles of an EM system from its transient response,” *Electromagnetics*, vol. 11, no. 2. pp. 223–233, 1991.
- [6] T. K. Sarkar, M. Salazar-Palma, M. D. Zhu and H. Chen, “Matrix Pencil Method (MPM),” in *Modern Characterization of Electromagnetic Systems and Its Associated Metrology*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc., 2021, pp. 21–106.
- [7] P. Vallet, X. Mestre and P. Loubaton, "Performance Analysis of an Improved MUSIC DoA Estimator," in *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 63, no. 23, pp. 6407-6422, Dec.1, 2015, doi: 10.1109/TSP.2015.2465302.

- [8] M. Bensalem and O. Barkat, "DOA estimation of linear dipole array with known mutual coupling based on ESPRIT and MUSIC," in *Radio Science*, vol. 57, no. 2, pp. 1-15, Feb. 2022, doi: 10.1029/2021RS007294.
- [9] R. K. Amineh and N. K. Nikolova, "Fourier-Space Image Reconstruction Using Microwave Measurements: The Path Toward Real-Time Microwave and Millimeter-Wave Imaging," in *IEEE Microwave Magazine*, vol. 25, no. 8, pp. 36-56, Aug. 2024, doi: 10.1109/MMM.2024.3403047.
- [10] М. Андрєєв, О. Дробахін, Д. Салтиков, М. Горєв, і І. Коджеспірова, "Тризондова мікрохвильова інтерферометрія для вимірювання переміщення механічних об'єктів з урахуванням коефіцієнта відбиття антени", *Вісті вузів. Радіoeлектроніка*, т. 65, вип. 4, с. 211–221, Квіт 2022.
- [11] V. P. Jani, A. T. Williams, V. P. Jani, A. G. Tsai, M. Intaglietta, and P. Cabrales, "Prony Analysis of Left Ventricle Pressure and Volume," *Medical Engineering & Physics*, vol. 116, p. 103987, 2023.
- [12] P. Wang, D. Karg, Z. Fan, R. X. Gao, K. Kwolek and A. Consiglio, "Non-contact identification of rotating blade vibration," *Mechanical Engineering Journal*, vol. 2, no. 3, pp. 15-00025, doi: 10.1299/mej.15-00025.
- [13] D. M. Pozar, "Transmission Line Theory," in *Microwave Engineering*, Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc., 2012. pp. 48–94.
- [14] M. V. Andreev, O. O. Drobakhin and D. Y. Saltykov "Complex Reflection Coefficient Determination via Digital Spectral Analysis of Multiprobe Reflectometer Output Signals," *2017 IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON)*, Kyiv, Ukraine, 2017, pp. 170–175, doi: 10.1109/UKRCON.2017.8100468.



- [15] O. V. Pylypenko, A. V. Doronin, N. B. Gorev and I. F. Kodzheshpurova “Two-probe measurements of the displacement of an object with account for the antenna reflection coefficient,” *Technical mechanics*, no. 3, pp. 88–97, 2019, doi: 10.15407/itm2019.03.088.
- [16] Y. M. Selivanov, A. P. Dzyuba, R. A. Iskanderov and S. V. Klymenko, “Study of Residual Stress and Strength of Triplex Glass,” *International Journal on Technical and Physical Problems of Engineering*, vol. 16, no. 3, pp. 401—407, 2024.
- [17] M. I. Andriychuk, M. M. Voitovych and V. P. Tkachuk, “Application of the Generalized Method of Eigenoscillations to the Solution of the Problems of Scattering on Nanostructures,” *Journal of Mathematical Sciences (United States)*, vol. 272, no. 1, pp. 64–79, 2023.
- [18] О. О. Дробахін і О. В. Олевський, “Підвищення стійкості оцінки параметрів методом Проні при наявності імпульсної завади,” *Питання прикладної математики і математичного моделювання*, вип. 23, с. 53–63, 2023, doi: 10.15421/322306.
- [19] O. O. Drobakhin and O. V. Olevskyi, “Improvement of the accuracy of the reflector distance estimation in the fresnel zone in the method of the time-domain signal synthesis based on the parametric spectral analysis,” *Питання прикладної математики і математичного моделювання*, vol. 24, pp. 18–29, 2024, doi: 10.15421/322403.
- [20] O. O. Drobakhin and O. V. Olevskyi, “Frequency adjustment method for the improvement of amplitude estimation in the parametric spectral analysis,” *Mathematical Modeling and Computing*, vol. 12, no. 2, pp. 581–587, 2025, doi: 10.23939/mmc2025.02.581.
- [21] О. О. Дробахін і О. В. Олевський, “Методи компенсації спотворень оцінок фази у багатозондових мікрохвильових вимірювачах,”

*Технічна механіка*, вип. 2, с. 72–86, 2025, doi: 10.15407/itm2025.02.072.

- [22] O. O. Drobakhin and O. V. Olevskyi, “Approaches for improvement of reliability of the Prony’s method computation,” *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 2675, no. 1, p. 012028, 2023, doi: 10.1088/1742-6596/2675/1/012028.
- [23] O. Drobakhin and O. Olevskyi, “Problems and Solutions Associated with Prony’s Method for Processing Data with Pulse Noise,” in *2023 IEEE XXVIII International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED)*, IEEE Xplore, 2023, pp. 119–123, doi: 10.1109/DIPED59408.2023.10269456.
- [24] О. О. Дробахін і О. В. Олевський, “Покращення якості відтворення параметрів сигналу методом Проні в присутності імпульсного шуму,” в *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (МПЗІС-2023)*, О. М. Кісельова, Ред., Дніпро: ДНУ, 2023, с. 118–119.
- [25] O. O. Drobakhin and O. V. Olevskyi, “Algorithm for the improvement of the matrix pencil method reliability under the influence of the impulse interference,” *Problems of applied mathematics and mathematical modeling*, vol. 25, pp. 18–29, 2025, doi: 10.15421/322502.
- [26] O. Drobakhin and O. Olevskyi, “Application of the Matrix Pencil Method for Spectral Analysis in Presence of Impulse Noise in Electric Signals”, in *2024 IEEE 7th International Conference on Smart Technologies in Power Engineering and Electronics (STEE)*, IEEE Xplore, 2024, pp. TT1.04.1–T1.04.5, doi: 10.1109/STEE63556.2024.10748007.
- [27] О. О. Дробахін і О. В. Олевський, “Корекція оцінок частот як засіб покращення якості обробки сигналів методами параметричного спектрального аналізу,” *Математичне та програмне забезпечення*

- інтелектуальних систем (МПЗІС-2024)* : Тези доповідей XXII Міжнародної науково-практичної конференції, Дніпро, Україна, 20–22 листоп. 2024 / ред. О. М. Кісельова, Ред. Дніпро, Україна, 2024. с. 121–122.
- [28] О. О. Дробахін і О. В. Олевський “Покращення оцінок параметрів сигналу за допомогою методу пучка матриць завдяки пропусканню зашумлених точок,” в *МПЗІС-2025*, О. М. Кісельова, Ред. Дніпро, Україна, 2025, с. 141–142.
- [29] O. Drobakhin, O. Olevskyi and V. Chuchva “Mathematical Methods for Improving Broadband Multi-Probe Measurements of Complex Reflectivity,” in *2025 IEEE 30th International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED)*, Tbilisi, Georgia, 2025, pp. 78-83, doi: 10.1109/DIPED66951.2025.11194508.
- [30] R. W. Hamming *Numerical Methods for Scientists and Engineers*, Chelmsford, MA: Courier Corporation, 1986.
- [31] V. I. Olevskyi, O. O. Drobakhin and O. V. Olevskyi “Study of Eigenfrequencies with the Help of Prony’s Method,” in *AIP Conference Proceedings*, 2017, vol. 1895, no. 1, pp. 060001.
- [32] A. Fernández Rodríguez, L. de Santiago Rodrigo, E. López Guillén, J. M. Rodríguez Ascariz, J. M. Miguel Jiménez and L. Boquete, “Coding Prony’s method in MATLAB and applying it to biomedical signal filtering,” *BMC Bioinformatics*, vol. 19, no. 1. pp. 451, 2018, doi: 10.1186/s12859-018-2473-y.
- [33] S. A. Frank *Control Theory Tutorial : basic concepts illustrated by software examples*, Cham: Springer, 2018.
- [34] J. D. Jackson, “Time-Varying Fields, Maxwell’s Equations, Conservation Laws,” in *Classical Electrodynamics*, New York, NY, US: John Wiley & Sons, Inc., 1962, ch. 6, pp. 169–201.

- [35] A. V. Doronin, N. B. Gorev, I. F. Kodzheshirova, E. N. Privalov, “A way to improve the accuracy of displacement measurement by a two-probe implementation of microwave interferometry,” *Progress in Electromagnetics Research M*, vol. 30, pp. 105–116, 2013, doi: 10.2528/PIERM13020504.
- [36] A. V. Doronin, N. B. Gorev, I. F. Kodzheshirova, and E. N. Privalov, “Displacement measurement using a two-probe implementation of microwave interferometry,” *Progress in Electromagnetics Research C*, vol. 32, pp. 245–258, 2012, doi: 10.2528/PIERC12071805.
- [37] О. О. Дробахін і С. Г. Алексін, “Розв’язок зворотної задачі для багатошарових діелектричних структур,” *Монографія*, Дніпро, Україна: ДНУ, 2012.
- [38] Yu. E. Surhanova and Yu. V. Mikhlin, “Investigation of Stability of Nonlinear Normal Modes of Dissipative System Oscillations Under Influence of Magnetic Field,” *Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях*, vol. 5, no 2, pp. 63–71, 2023.
- [39] V. Ye. Belozyorov, S. A. Volkova and V. G. Zaytsev, “Singular Differential Equations and Their Applications for Modeling Strongly Oscillating Processes,” *Journal of Optimization, Differential Equations and their Applications*, vol. 31, no. 1, pp. 22–52, 2023, doi: 10.15421/142302.
- [40] V. Ye. Belozyorov and S. A. Volkova, “Discrete Processes and Chaos in Systems of Ordinary Differential Equations,” *Journal of Optimization, Differential Equations and their Applications*, vol. 30, no. 2, pp. 62—78, 2022, doi: 10.15421/142210.
- [41] V. Ye. Belozyorov and S. A. Volkova, “Study of the Dynamics of Product Sales Process with the Help of Zolotas Model,” *Journal of Optimization*,

- Differential Equations and their Applications*, vol. 32, no. 1, pp. 33—54, 2024, doi: 10.15421/142402.
- [42] Ю. Е. Сурганова і Ю. В. Міхлін, “Дослідження стійкості нелінійних нормальних мод коливань дисипативної системи під впливом магнітного поля,” *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях, вип. 5, № 2, 2023, doi: 10.20998/2222-0631.2023.02(5).07.
- [43] Y. O. Lebedenko and Y. V. Mikhlin, “Stationary Regimes and Transient in Two Systems with Limited Power Supply,” *Journal of Applied Nonlinear Dynamics*, vol. 14, no. 1, pp. 189—210, 2025, doi: 10.5890/JAND.2025.03.013.
- [44] K. Avramov, B. Ebner, J. Edelmann, Y. V. Mikhlin and B. Uspensky, “Self-sustained oscillations of a magnetic track brake frame,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 113, no. 10, pp. 11121—11142, 2025, doi: 10.1007/s11071-024-10643-6.
- [45] S. J. Orfanidis, “Multilayer Structures,” in *Electromagnetic Waves and Antennas*, US: Rutgers University, 2016, ch. 6, pp. 186–240.
- [46] C. A. Balanis, “Reflection and transmission,” in *Advanced engineering electromagnetics*, New York City: John Wiley & Sons, Inc., 1989, pp. 180–253.
- [47] M. I. Andriychuk and V. P. Tkachuk, “Three-Dimensional Model of a Focusing and Radiating Antenna Array,” *Journal of Mathematical Sciences (United States)*, vol. 277, no. 1, pp. 133—144, 2023.
- [48] M. Andriychuk and V. Tkachuk, “Optimization of Radiation Characteristics of Linear Focusing Array Consisting of Semitransparent Mirrors,” *Radioelectronics and Communications Systems*, vol. 66, no. 9, pp. 454—468, 2023.
- [49] Ю. І. Волощук, *Сигнали та процеси у радіотехніці: Підручник для студентів ВНЗ. В 4 т. Т. 1*, Харків, Україна: Компанія СМІТ, 2003.

- [50] M. V. Andreev and O. O. Drobakhin, "Feature of Prony's Method Application for Natural Frequencies Estimation from the Frequency Response," in *2016 8th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS)*, Odessa, Ukraine, Sep. 5–11, 2016, pp. 18–20, ISBN 978-1-5090-1578-8.
- [51] I. Bolesta, A. Demchuk, M. Andriychuk, O. Kushnir and B. Horon, "Analytical-Numerical Study of Electromagnetic Scattering on Small-Size Particles," *Radioelectronics and Communications Systems*, vol. 66, no. 10, pp. 501–514, 2023.
- [52] F. M. Ghannouchi and A. Mohammadi *The Six-Port Technique with Microwave and Wireless Applications*, Artech House, 2009.
- [53] K. Haddadi, M. M. Wang, D. Glay and T. Lasri, "A 60 GHz Six-Port Distance Measurement System With Sub-Millimeter Accuracy," in *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 19, no. 10, pp. 644–646, Oct. 2009, doi: 10.1109/LMWC.2009.2029744.
- [54] O. O. Drobakhin, "Holographic approach to multifrequency microwave methods of dielectric NDE," in *Proc.15 World Conf. on Non-Destructive Testing*, Rome, Italy, 2000, pp. 35-38.
- [55] K. Staszek, "Balanced Six-Port Reflectometer With Nonmatched Power Detectors," in *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 69, no. 11, pp. 4869-4878, Nov. 2021, doi: 10.1109/TMTT.2021.3101701.
- [56] R. H. T. Bates and M. J. McDonnell, *Image Restoration and Reconstruction*, Oxford: Clarendon Press, 1986.
- [57] O. O. Drobakhin, "Regularization of data processing in six port reflectometry," in *Int.Conf on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory*, Kharkov, July 1998, in Volume 1, pp. 442–443 doi: 10.1109/MMET.1998.710004.

- [58] О. О. Дробахін, О. В. Доронін, Д. Ю. Салтиков і В. В. Григор'єв, "Застосування принципу голографії з трьома опорними сигналами для вимірювання комплексного коефіцієнта відбиття трьохзондовим хвилеводним датчиком," *Вісник Дніпропетровського університету. Фізика. Радіoeлектроніка*, т. 16, вип. 15, № 2, с. 131–134, 2008.
- [59] F. Caspers and P. Kowina "RF Measurement Concepts," in *Proceedings of the CAS-CERN Accelerator School: Advanced Accelerator Physics*, W. Herr Ed., Trondheim, Norway, Aug. 19–29, 2013 pp. 101–156, doi: 10.5170/CERN-2014-009.101.
- [60] F. Attivissimo, N. Giaquinto and M. Savino, "Worst-case uncertainty measurement in ADC-based instruments," *Computer Standards & Interfaces*, vol. 23, no. 1, pp. 5-10, 2007, doi: 10.1016/j.csi.2005.12.002.
- [61] О. О. Дробахін, "Вимірювально-обчислювальні комплекси для визначення параметрів діелектричних об'єктів на основі голографічного підходу," в *Випромінювальні структури багатofункціональних радіoeлектронних систем: теорія і застосування*, В. О. Катрич, Ред., LAP LAMBERT Academic Publishing, 2017. с. 199–274.
- [62] S. Kim and C. Nguyen "A displacement measurement technique using millimeter-wave interferometry," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 51, no. 6, pp. 1724–1728, 2003, doi: 10.1109/TMTT.2003.812575.
- [63] S. Kim and C. Nguyen "On the development of a multifunction millimeter-wave sensor for displacement sensing and low-velocity measurement," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 52, no. 11, pp. 2503–2512, 2004, doi: 10.1109/TMTT.2004.837153.
- [64] B. M. Kats, A. A. Lvov, V. Petrovich Meschanov, E. M. Shatalov and L. V. Shikova, "Synthesis of a Wideband Multiprobe Reflectometer," in

- IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 56, no. 2, pp. 507-514, Feb. 2008, doi: 10.1109/TMTT.2007.914631.
- [65] О. О. Дробахін, “Розвиток в Україні методів вимірювання в мікрохвильовому і терагерцовому діапазонах електромагнітних хвиль (огляд),” *Вісті вищих учбових закладів. Радіoeлектроніка*, т. 67, № 4, с. 183–203, 2024, doi: 10.20535/S0021347024040034.
- [66] M. Andreev, V. Borulko, O. Drobakhin and D. Sidorov, “Wide-band reflection coefficient measurements using direct and inverse Frequency-time domain transformations,” in “*Ultrawideband and ultrashort impulse signals*” 2012 6-th International Conference, Sevastopol, Ukraine, 2012, pp. 252-254
- [67] L. E. Franks, “Representation of linear operators,” *Signal theory: revised edition*, US: Dowden & Culver, Inc., 1981. pp. 98–134.
- [68] O. O. Drobakhin, V.V. Alekseev, M. V. Andreev, Ye. V. Kondratyev, and D. Yu. Saltykov, “Multifrequency Near-Zone Radar of 6-mm Wave Range with Combination of Pulse Synthesis and Transversal Scanning,” *Telecommunications and Radio Engineering*, vol. 66, no. 10, pp.855-861, 2007.
- [69] V. V. Alekseev, O. O. Drobakhin, Ye. V. Kondratyev, and D. Yu. Saltykov, “Microwave introscopy using multifrequency measurements and transversal scan,” *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine*, vol. 21, no. 2, pp. 24-26, Feb. 2006.
- [70] M. I. Skolnik, *Radar Handbook*, 3rd ed. New York, NY: McGraw-Hill Education, 2008.
- [71] D. Batrakov, M. Antyufeyeva, A. Batrakov and S. Urdzik, “Overview of modern methods of processing georadar signals in tasks of defectoscopy,” *Radiophysics*, no. 37, pp. 7-19, Dec. 2022.
- [72] A. P. Dzyuba, R. A. Iskanderov, Y. M. Selivanov and S. A. Valiyeva, “Holographic Study of Non-Stationary States of Thin-Walled Structure



- Elements Under Thermal and Thermomechanical Loading,” *International Journal on Technical and Physical Problems of Engineering*, vol. 16, no. 2, pp. 342—348, 2024.
- [73] A. P. Dzyuba, R. A. Iskanderov and Y. M. Selivanov, “Models and Technologies of Experimental Studies of Properties of Inhomogeneous Power Structural Elements with Optimal Parameters,” *International Journal on Technical and Physical Problems of Engineering*, vol. 15, no. 2, pp. 263—273, 2023.
- [74] O. Drobakhin and G. Sherstuk, “Resolution of inverse aperture synthesis in the near-field zone of the horn antenna radiation,” in *Proc. 8 Int. Kharkov Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves, MSMW'13*, Kharkiv, Ukraine, June 23-28, 2013, CD, P.315-317.
- [75] A. van der Ziel, *Noise in solid state devices and circuits*, New York, NY: Wiley, 1986.
- [76] C. D. Motchenbacher and J. A. Connelly “Fundamental Noise Mechanisms,” in *Low-noise Electronic System Design*,. New York, NY: Wiley, 1993, pp. 5–37.
- [77] J. Cheon and G. Han, "Noise Analysis and Simulation Method for a Single-Slope ADC With CDS in a CMOS Image Sensor," in *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, vol. 55, no. 10, pp. 2980-2987, Nov. 2008, doi: 10.1109/TCSI.2008.923434.
- [78] O. S. Antropov, V. F. Borulko, V. M. Dolgov, O. O. Drobakhin and S. M. Vovk, “Vibration data analysis in presence of distorting pulses,” *Solid State Phenomena*, vol. 147—149, pp. 621–626, 2009, doi: 10.4028/www.scientific.net/ssp.147-149.621.

- [79] M. V. Andreev, O. O. Drobakhin and S. G. Lebedev, “The Prony’s method realisation in the presence of pulse noise,” in *2012 International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory*, Aug. 28–30, 2012, pp. 161–163, doi: 10.1109/MMET.2012.6331275.
- [80] O. Drobakhin and O. Olevskyi “Segmented Approach for the Prony’s Method Numerical Realization,” in *2021 IEEE 26th International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED)*, Tbilisi, Georgia, Sep. 8–10, 2021, pp. 209–212, doi: 10.1109/DIPED53165.2021.9552334.
- [81] V. F. Borulko and S. M. Vovk “Minimum-duration filtering,” *Radio Electronics, Computer Science, Control*, no. 1, pp. 7–14, 2016.
- [82] S. M. Vovk and V. F. Borulko, “The method of minimum duration for time-limited signal restoration,” *Radioelectronics and Communications Systems*. vol. 34, no. 8, pp. 66–69, 1991.
- [83] S. M. Vovk, O. S. Antropov and V. F. Borulko, “Definition of parameters values of sinusoidal signal, distorted by unknown pulses,” *Radioelectronics and Communications Systems*, vol. 51, no. 9, pp. 488–494, 2008.
- [84] С. М. Вовк “Узагальнена математична модель процесу обробки даних для складного шумового оточення,” *Питання прикладної математики і математичного моделювання*, вип. 21, сс. 26–33, 2021, doi: 10.15421/322103.
- [85] С. М. Вовк “Функціонал квазіпротяжності та його застосування,” *Питання прикладної математики і математичного моделювання*, вип. 23, сс. 18–30, 2023, doi: 10.15421/322302.
- [86] P. Barone, E. Massaro and A. Polichetti, “The Segmented Prony method for the analysis of non-stationary time series,” *Astronomy and Astrophysics*, vol. 209, pp. 435–444, 1988.

- [87] M. G. Larson and F. Bengzon *The Finite Element Method: theory, implementation, and applications*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.
- [88] V. Adlucky, N. Guk and V. Loboda, “Finite Element Modeling of Partially Conductive Interfacial Crack in Piezoelectric Bimaterial,” in *Advanced Structured Materials*, 2024, pp. 15—30.
- [89] W. C. Gibson, *The Method of Moments in Electromagnetics*, New York, NY: Chapman & Hall/CRC, 2008.
- [90] P. Langer , M. Maeder , C. Guist , M. Krause , and S. Marburg, “More Than Six Elements Per Wavelength: The Practical Use of Structural Finite Element Models and Their Accuracy in Comparison with Experimental Results,” *Journal of Computational Acoustics*, vol. 25, no. 4. pp. 1750025, 2017, doi: 10.1142/S0218396X17500254.
- [91] М. В. Андрєєв, О. О. Дробахін, М. Б. Горєв, І. Ф. Коджеспірова і Д. Ю. Салтиков, “Проста методика визначення довжин закритичних зон біконічного резонатора,” *Вісмі вищих учбових закладів. Радіoeлектроніка*, т. 67, № 1, с. 17–26, 2024.
- [92] M. Andreev, O. Drobakhin, D. Saltykov, N. Gorev and I. Kodzheshpirova, “On the Calculation of Biconical Cavity Parameters to Provide Up-To-Date Material Characterization,” in *Proceeding of 2025 IEEE XXXth International Seminar/Workshop Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED)*, Tbilisi, Sep. 08–10 2025, pp. 282–287.
- [93] V. Tabatadze, O. Drobakhin and K. Karaçuha, “Pulse diffraction by a circular dielectric cylinder,” *Journal of Electrical Engineering*, vol. 74, no. 3. pp. 188-19, 2023.
- [94] R. Zaridze, G. Bit-Babik, K. Tavzarashvili, N. K. Uzunoglu and D. Economou, “The method of auxiliary sources (MAS)—Solution of

- propagation, diffraction and inverse problems using MAS,” *Applied Computational Electromagnetics*, vol. 171, pp. 33–45, 2000.
- [95] C. A. Balanis, “Aperture Antennas,” in *Advanced engineering electromagnetics: analysis and design*, New York City: John Wiley & Sons, Inc., 1989, pp. 639–718.
  - [96] V. Tabatadze, K. Karaçuha, Ö. F. Alperen and R. Zaridze, “A new numerical approach to electromagnetic eigenvalue problem and wave scattering by conducting complex-shaped geometries: gaussian basis and regularized Hankel functions,” *Journal of applied electromagnetism*, vol. 24, no. 1-16, 2022.
  - [97] S. L. Marple, *Digital Spectral Analysis*, Courier Dover Publications, 2019, pp. 271–298.
  - [98] F. D. Hildebrand, “Approximations of various types,” in *Introduction to numerical analysis*, New York, NY: McGraw-Hill, 1956, ch. 9, pp. 368–421.
  - [99] S. Engelberg, “The Spectral Analysis of Random Signals,” in *Digital Signal Processing: an experimental approach*, London : Springer-Verlag London Limited, 2008. pp. 57–66.
  - [100] T. Lobos, Z. Leonowicz, J. Rezmer and P. Schegner, "High-resolution spectrum-estimation methods for signal analysis in power systems," in *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 55, no. 1, pp. 219-225, Feb. 2006, doi: 10.1109/TIM.2005.862015.
  - [101] A. Antoniou, “The discrete Fourier transform,” in *Digital Signal Processing: signals systems and filters*, New York, NY: McGraw-Hill, 2005, pp. 321–388.
  - [102] R. W. Hamming, *Digital Filters*, 3rd Ed., Mineola, NY, US: Dover Publications, Inc., 1998.

- [103] О. О. Дробахін, “Спектральний аналіз даних на основі дискретного перетворення Фур’є,” в *Методи комп’ютерного експерименту в радіофізиці : навчальний посібник*, Харків: ХНУ імені Каразіна, 2016, гл. 1, с. 8–27.
- [104] A. V. Oppenheim, R. W. Schafer and J. R. Buck, “The discrete Fourier transform,” in *Discrete-Time Signal Processing*, 2nd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, Inc., 1999. pp. 541—629.
- [105] R. Roy and T. Kaliath, “ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques,” *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 37, no. 7. pp. 984–995, 1989, doi: 10.1109/29.32276.
- [106] T. Sarkar, D. Weiner and V. Jain, "Some mathematical considerations in dealing with the inverse problem," in *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 29, no. 2, pp. 373-379, March 1981, doi: 10.1109/TAP.1981.1142573.
- [107] R. Prony, “Essai experimental et analytique: Sur les lois de la dilatabilitede fluides elastiqueet sur celles de la force expansive de la vapeurde l'alkool a differentes temperatures,” *Journal de l'École Polytechnique*, no. 1, pp. 24—76, 1795.
- [108] M. Van Blaricum and R. Mittra, "A technique for extracting the poles and residues of a system directly from its transient response," in *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 23, no. 6, pp. 777-781, November 1975, doi: 10.1109/TAP.1975.1141184.
- [109] A. Ben-Israel and T. N. E. Greevile, *Generalized inverses: theory and applications*, 2-nd ed. New York, NY: Springer, 2003.
- [110] D. Tufts and R. Kumaresan, “Estimating the parameters of exponentially damped sinusoids and pole-zero modeling in noise,” *IEEE Transactions*

- on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 30, no. 6, pp. 833–840, 1982, doi: 10.1109/TASSP.1982.1163974.
- [111] W. K. Nicholson, “Orthogonality,” in *Linear Algebra with Applications: open edition*,. Lyryx Learning, 2019, pp. 415–502.
  - [112] T. K. Sarkar and O. Pereira, "Using the matrix pencil method to estimate the parameters of a sum of complex exponentials," *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 37, no. 1, pp. 48-55, Feb. 1995, doi: 10.1109/74.370583.
  - [113] Y. Hua and T. K. Sarkar, “Matrix pencil and system poles,” *Signal Processing*, vol. 21, no. 2. pp. 195–198, 1990, doi: 10.1016/0165-1684(90)90050-9.
  - [114] N. Yilmazer, T. K. Sarkar and M. Salazar-Palma, “DOA Estimation using Matrix Pencil and ESPRIT methods using single and multiple snapshots,” in *2010 URSI International Symposium on Electromagnetic Theory*, Berlin, Germany, 2010. pp. 215–218.
  - [115] S. L. Marple, “Prony’s Method,” in *Digital Spectral Analysis*, Courier Dover Publications, 2019, pp. 271–298.
  - [116] S. Elaydi, “Linear Difference Equations of Higher Order,” *An Introduction to Difference Equations*, 3-rd ed. US: Springer, 2005, pp. 57–116.
  - [117] О. О. Дробахін, “Метод Проні,” в *Методи комп’ютерного експерименту в радіофізиці: навчальний посібник*, Харків: ХНУ імені Каразіна, 2016, гл. 2, С. 28–39.
  - [118] O. O. Drobakhin, “Prony’s-method identification of parameters of model which is sum of exponential functions,” *Optoelectronics, instrumentation, and data processing*, no. 4, pp. 37–42, 1989.
  - [119] A. S. Householder, *On Prony's method of fitting exponential decay curves and multiple-hit survival curves*, Oak Ridge, Tenn.: Oak Ridge National Laboratory, 1950.

- [120] G. Strang, "Vector Spaces," in *Linear Algebra and Its Applications*, 4th ed., Brooks Cole Thomson, 2006, ch. 2, pp. 77–158.
- [121] M. Planitz, "Inconsistent systems of linear equations," *Mathematical Gazette*, vol. 63, no. 425. pp. 181-185, 1979.
- [122] N. A. Guk, Y. M. Matsevity, V. O. Povhorodnii and M. O. Safonovy, "Determining The Strength of Structural Materials by Solving Inverse Problems of Thermoelasticity," *Journal of Optimization, Differential Equations and their Applications*, vol. 33, no. 1, pp. 128—143, 2025, doi: 10.15421/142507.
- [123] G. Strang, "Positive Definite Matrices," in *Linear Algebra and Its Applications*, 4th ed., Brooks Cole Thomson, 2006, ch. 6, pp. 345–389.
- [124] pinv. *MATLAB Help Center*. URL: <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/pinv.html> (access date: 14.12.2025).
- [125] numpy.linalg.pinv. *NumPy documentation*. URL: <https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.linalg.pinv.html> (access date: 14.12.2025).
- [126] А. О. Мінаков і О. Ф. Тирнов *Статистична радіофізика: підручник для студентів вузів*, Харків: Факт, 2003.
- [127] M. VanBlaricum and R. Mittra, "Problems and solutions associated with Prony's method for processing transient data," in *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 26, no. 1, pp. 174-182, January 1978, doi: 10.1109/TAP.1978.1141804.
- [128] М. В. Андрєєв, О. О. Дробахін, і М. Потапов, "Порівняльний аналіз точності оцінювання полюсів частотних характеристик методами дробово-раціональної апроксимації," *Вісті вищих учбових закладів. Радіoeлектроніка*, т. 67, № 11, с. 674–688, 2024, doi: 10.20535/S0021347024110025.

- [129] Z. A. Maricevic, T. K. Sarkar, Y. Hua and A. R. Djordjevic, "Time-domain measurements with the Hewlett-Packard network analyzer HP 8510 using the matrix pencil method," in *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 39, no. 3, pp. 538-547, March 1991, doi: 10.1109/22.75298.
- [130] Y. Hua and T. K. Sarkar, "Generalized pencil-of-function method for extracting poles of an EM system from its transient response," in *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 37, no. 2, pp. 229-234, Feb. 1989, doi: 10.1109/8.18710.
- [131] Y. Hua and T. K. Sarkar, "Matrix pencil method for estimating parameters of exponentially damped/undamped sinusoids in noise," in *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 38, no. 5, pp. 814-824, May 1990, doi: 10.1109/29.56027.
- [132] I. Markovsky. "Exact identification with missing data," in *Proc. of the 52nd IEEE Conf. on Decision and Control*, Florence, Italy, 2013, pp. 151–155.
- [133] Harris C. R. et al. Array programming with NumPy. *Nature*, vol. 585, no. 7825. pp. 357–362. URL: <https://doi.org/10.1038/s41586-020-2649-2>.
- [134] Virtanen P. et al., "SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python," *Nature Method.* 2020 vol. 17, no. 3. pp. 261-272. doi: 10.1038/s41592-019-0686-2.
- [135] eig. *SciPy v1.16.2 Manual*. Accessed: Dec. 19, 2025. [Online] URL: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.linalg.eig.html>.
- [136] numpy.polynomial.polynomial.Polynomial.roots. *NumPy v2.3 Manual*. Accessed: Dec. 19, 2025. [Online]. URL: <https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.polynom>



ial.polynomial.Polynomial.roots.html#numpy.polynomial.polynomial.Polynomial.roots.

- [137] О. О. Дробахін and О. В. Олевський, “Комп’ютерна програма «Method of Auxiliary Sources Solver for Perfectly Electrically Conductive Structures (MASSPECS)»”, *Авторське право і суміжні права*, вип. 90, с. 41, 2025.
- [138] F. Maione, R. De Pietri, A. Feo and A. Loffler, “Spectral analysis of gravitational waves from binary neutron star merger remnants,” *Physical Review D*, no. 6, pp. 063011, 2017.
- [139] О. О. Дробахін і О. В. Олевський, “Сегментний підхід до реалізації методу Проні,” в *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (МПЗІС-2021): Тези доповідей XIX Міжнародної науково-практичної конференції*, Дніпро, Україна, 17-19 листопада 2021, с. 71–72.
- [140] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest and C. Stein, “Medians and Order Statistics,” in *Introduction To Algorithms*, T. H. Cormen, Ed., Cambridge, MA, US: MIT Press, 2001, ch. 9, pp. 183—196.
- [141] *scipy.stats.linregress*. Accessed: Dec. 17, 2025. [Online]. Available: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.stats.linregress.html>.
- [142] A. Antoniou, “Digital signal processing applications,” in *Digital Signal Processing: signals systems and filters*, New York, NY: McGraw-Hill, 2005, pp. 829–890.
- [143] *scipy.signal.hilbert*. Accessed: Nov. 25, 2025. [Online]. Available: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.signal.hilbert.html>.
- [144] *Ngspice, the open source Spice circuit simulator*. Accessed: Dec. 15, 2025. [Online] Available: <https://ngspice.sourceforge.io/>.

- [145] Infineon Technologies AG, Munich, Germany. *BAT68....* (2009). Accessed: Jul. 14, 2025. [Online]. Available: <https://www.infineon.com/assets/row/public/documents/24/49/infineon-bat68series-ds-en.pdf>.
- [146] Microchip, “28/40/44-Pin, Enhanced Flash-Based 8-Bit CMOS Microcontrollers with nanoWatt Technology,” PIC16F882/883/884/886/887 Data Sheet, 2007.
- [147] R. W. Kulp, “An optimum sampling procedure for use with the Prony method,” *IEEE transactions on electromagnetic compatibility*, vol. EMC-23, no. 2, pp. 67-71, 1981.
- [148] @Tad, “Measure of ‘how much diagonal’ a matrix is.” Accessed: Aug. 23, 2024. [Online]. Available: <https://math.stackexchange.com/a/1393907/1293465>.
- [149] О. О. Дробахін і О. В. Олевський, “Науковий твір «Метод вилучення точок з викидами при реалізації алгоритму Проні»”, *Авторське право і суміжні права*, вип. 96, с. 172, 2025.
- [150] A. Özdoğru, F. Rund and K. Fliegel, “Performance evaluation of perceptible impulsive noise detection methods based on auditory models,” *EURASIP Journal on Audio, Speech, and Music Processing*, vol. 2025, no. 1, pp. 2, 2025, doi: 10.1186/s13636-024-00389-9.
- [151] О. О. Дробахін і О. В. Олевський, “Науковий твір «Метод корекції частот»”, *Авторське право і суміжні права*, вип. 91, с. 84, 2025.
- [152] L. Cohen, “Instantaneous frequency and the complex signal,” *Time-Frequency Analysis*, Prentice Hall PTR, 1995, pp. 27–43.

## Додаток А

## СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Статті в фахових виданнях категорії Б:

- О. О. Дробахін і О. В. Олевський, “Підвищення стійкості оцінки параметрів методом Проні при наявності імпульсної завади,” *Питання прикладної математики і математичного моделювання*, вип. 23, с. 53–63, 2023, doi: 10.15421/322306.
- О. О. Drobakhin and O. V. Olevskyi, “Improvement of the accuracy of the reflector distance estimation in the fresnel zone in the method of the time-domain signal synthesis based on the parametric spectral analysis,” *Питання прикладної математики і математичного моделювання*, vol. 24, pp. 18–29, 2024, doi: 10.15421/322403.
- О. О. Дробахін і О. В. Олевський, “Методи компенсації спотворень оцінок фази у багатозондових мікрохвильових вимірювачах,” *Технічна механіка*, вип. 2, с. 72–86, 2025, doi: 10.15407/itm2025.02.072.
- О. О. Drobakhin and O. V. Olevskyi, “Algorithm for the improvement of the matrix pencil method reliability under the influence of the impulse interference,” *Problems of applied mathematics and mathematical modeling*, vol. 25, pp. 18–29, 2025, doi: 10.15421/322502.

Статті у виданнях категорії А (Scopus):

- О. О. Drobakhin and O. V. Olevskyi, “Frequency adjustment method for the improvement of amplitude estimation in the parametric spectral analysis,” *Mathematical Modeling and Computing*, vol. 12, no. 2, pp. 581–587, 2025, doi: 10.23939/mmc2025.02.581.

Тези конференцій:

- О. О. Drobakhin and O. V. Olevskyi, “Approaches for improvement of reliability of the Prony’s method computation,” *Journal of Physics: Conference*

- Series*, vol. 2675, no. 1, p. 012028, 2023, doi: 10.1088/1742-6596/2675/1/012028.
- O. Drobakhin and O. Olevskyi, “Problems and Solutions Associated with Prony’s Method for Processing Data with Pulse Noise,” in *2023 IEEE XXVIII International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED)*, IEEE Xplore, 2023, pp. 119–123, doi: 10.1109/DIPED59408.2023.10269456.
  - О. О. Дробахін і О. В. Олевський, “Покращення якості відтворення параметрів сигналу методом Проні в присутності імпульсного шуму,” in *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (МПЗІС-2023)*, О. М. Кісельова, Ред., Дніпро: ДНУ, 2023, с. 118–119.
  - O. Drobakhin and O. Olevskyi, “Application of the Matrix Pencil Method for Spectral Analysis in Presence of Impulse Noise in Electric Signals”, in *2024 IEEE 7th International Conference on Smart Technologies in Power Engineering and Electronics (STEE)*, IEEE Xplore, 2024, pp. TT1.04.1–T1.04.5, doi: 10.1109/STEE63556.2024.10748007.
  - О. О. Дробахін і О. В. Олевський, “Корекція оцінок частот як засіб покращення якості обробки сигналів методами параметричного спектрального аналізу,” *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (МПЗІС-2024) : Тези доповідей XXII Міжнародної науково-практичної конференції, Дніпро, Україна, 20–22 листоп. 2024 / ред. О. М. Кісельова, Ред. Дніпро, Україна, 2024. с. 121–122.*
  - O. Drobakhin, O. Olevskyi and V. Chuchva “Mathematical Methods for Improving Broadband Multi-Probe Measurements of Complex Reflectivity,” in *2025 IEEE 30th International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED)*, Tbilisi, Georgia, 2025, pp. 78-83, doi: 10.1109/DIPED66951.2025.11194508.

- О. О. Дробахін і О. В. Олевський “Покращення оцінок параметрів сигналу за допомогою методу пучка матриць завдяки пропусканню зашумлених точок,” в *МПЗІС-2025*, О. М. Кісельова, Ред. Дніпро, Україна, 2025, с. 141–142.

## Додаток Б

## ПРОГРАМНИЙ КОМПЛЕКС MASSPECS

```

"""
Shape library.
"""

import numpy as np
from numpy.linalg import norm
from warnings import warn

class Collection:
    """
    A collection of basic shapes acting like a single object.
    """

    def __init__(self, *shapes):
        self.shapes = shapes

    def append(self, *shapes):
        self.shapes += shapes

    def remove_by_index(self, ind):
        self.shapes = self.shapes[:ind] + self.shapes[ind + 1:]

    def is_inside(self, coord):
        for shape in self.shapes:
            if shape.is_inside(coord):
                return True

    def copy_and_shift(self, collection, coord_shift):
        new_shapes = tuple()

```

```

for shape in self.shapes:
    new_shapes += shape.copy_and_shift()
new_collection = Collection(*new_shapes)
return new_collection

```

```

@property
def coords(self):
    coords = None
    for shape in self.shapes:
        if coords is None:
            coords = shape.coords
        else:
            coords = np.append(coords, shape.coords, axis = 0)
    return coords

```

```

@property
def source_coords(self):
    source_coords = None
    for shape in self.shapes:
        if source_coords is None:
            source_coords = shape.source_coords
        else:
            source_coords = np.append(source_coords, shape.source_coords,
                                     axis = 0)
    return source_coords

```

```

@property
def point_density(self):
    return np.max([shape.point_density for shape in self.shapes])

```

```
class LineCollection:
```

```
    """
```

```
    Generates a single object made of several unconnected zigzag lines with the
    specified vertex coordinates.
```

```
    """
```

```
    @staticmethod
```

```
    def __parametric(coords, l_arr):
```

```
        coords = np.array(coords, dtype = np.float64)
```

```
        res = np.full((len(l_arr), 2), np.nan, dtype = np.float64)
```

```
        dir_vects = np.diff(coords, axis = 0)
```

```
        dir_vect_lens = norm(dir_vects, axis = 1)
```

```
        for n_vect, dir_vect_len in enumerate(dir_vect_lens):
```

```
            dir_vects[n_vect] /= dir_vect_len
```

```
        dir_vect_lens[-1] = np.inf
```

```
        for n_l, l in enumerate(l_arr):
```

```
            l_rem = l
```

```
            for start_coord, dir_vect, dir_vect_len in zip(
                coords[:-1], dir_vects, dir_vect_lens):
```

```
                if l_rem > dir_vect_len:
```

```
                    l_rem -= dir_vect_len
```

```
                    continue
```

```
                    end_coord = start_coord + dir_vect*l_rem
```

```
                    res[n_l, :] = end_coord
```

```
                    break
```

```
        return res
```

```
    def __init__(self, coords_arr, point_density, center_offset = (0, 0)):
```

```
        self.coords = []
```

```
        for coords in coords_arr:
```

```
            self.coords.append(
```



```

        np.array(coords, dtype = np.float64) + center_offset)
self.point_density = point_density
self.source_coords = None
for coords in coords_arr:
    total_len = np.sum(norm(np.diff(coords, axis = 0), axis = 1))
    l_arr = np.linspace(0, total_len, int(total_len*point_density))
    if self.source_coords is None:
        self.source_coords = self.__parametric(coords, l_arr)
    else:
        self.source_coords = np.append(
            self.source_coords,
            self.__parametric(coords, l_arr),
            axis = 0
        )

def is_inside(self, coord):
    return False

def copy_and_shift(self, coord_diff):
    return LineCollection(self.coords, self.point_density, coord_diff)

class Line:
    """
    Generates a zigzag with the specified vertex coordinates.

    Parameters
    -----
    coords : (N, 2) array_like
        Array of the coordinate pairs.
    point_num : int

```

Total number of the auxiliary sources.

**center\_offset** : tuple, optional

Coordinates by which to offset the polygon.

•••••

@staticmethod

```
def __parametric(origin, vect_arr, l):
```

```
res = np.array(origin, dtype = np.float64)
```

```
for vect in vect_arr:
```

$$\text{vect len} = \text{norm}(\text{vect})$$

```
if l > vect len:
```

$$l \stackrel{-}{=} \text{vect } l \text{ en}$$

```
res += vect
```

else:

```
res += vect/vect len*1
```

break

```
return res
```

```
def init (self, coords, point density, center offset = (0, 0)):
```

```
self.coords = np.array(coords) + np.array(center_offset)
```

self.point density = point density

```
vect arr = np.diff(self.coords, axis = 0)
```

```
1 full = np.sum(norm(vect_arr, axis = 1))
```

```
point num = int(1 full*point density)
```

```
self.source_coords = np.zeros((point_num, 2), dtype = np.float64)
```

```
l_arr = np.linspace(0, l_full, point_num)
```

```
for num, l in enumerate(1 arr):
```

```
self.source_coords[num, :] = self.__parametric(self.coords[0, :],
                                                vect_arr,
                                                1
                                                )
```

```
def is_inside(self, coord):
```

```
    return False
```

```
def copy_and_shift(self, coord_diff):
```

```
    """
```

Makes a copy and shifts the object by the coord\_delta.

Parameters

```
-----
```

coord\_diff : (2,) array\_like

Coords to move the object by.

```
    """
```

```
    new_line = Line(self.coords, self.point_density, coord_diff)
```

```
    return new_line
```

```
class Polygon:
```

```
    """
```

Generates a polygon with the specified vertex coordinates.

Parameters

```
-----
```

coords : (N, 2) array\_like

Array of the coordinate pairs.

point\_num : int

Total number of the auxiliary sources.

center\_offset : tuple, optional

Coordinates by which to offset the polygon.

```
    """
```

```
@staticmethod
```

```

def __intersection(origin_1, end_1, origin_2, end_2):
    v_1 = end_1 - origin_1
    v_2 = end_2 - origin_2
    A = np.array([v_1, -v_2], dtype = np.float64).T
    if np.linalg.matrix_rank(A) < 2:
        return False
    b = origin_2 - origin_1
    t = np.linalg.solve(A, b)
    if np.all(np.logical_and(t >= 0, t <= 1)):
        return True
    return False

```

```

@staticmethod

```

```

def __parametric(origin, vect_arr, l):
    res = np.array(origin, dtype = np.float64)
    for vect in vect_arr:
        vect_len = norm(vect)
        if l > vect_len:
            l -= vect_len
            res += vect
        else:
            res += vect/vect_len*l
            break
    else:
        raise ValueError("The length must not exceed the perimeter.")
    return res

```

```

def __init__(self, coords, point_num, center_offset = (0, 0)):
    self.coords = np.array(coords) + np.array(center_offset)
    vect_arr = np.diff(np.append(self.coords,

```

```

        [self.coords[0, :]],
        axis = 0
    ),
    axis = 0
)

self.source_coords = np.zeros((point_num, 2), dtype = np.float64)
perimeter = np.sum(norm(vect_arr, axis = 1))
l_arr = np.linspace(0, perimeter, point_num + 1)[: -1]
for num, l in enumerate(l_arr):
    self.source_coords[num, :] = self.__parametric(self.coords[0, :],
                                                    vect_arr,
                                                    l
                                                    )

self.__rightmost = np.max(self.coords[:, 0]) + 1
self.__coords_augmented = np.append([self.coords[-1, :]],
                                     self.coords,
                                     axis = 0
                                     )

def is_inside(self, coord):
    coord = np.array(coord, dtype = np.float64)
    intersection_count = 0
    for num in range(self.__coords_augmented.shape[0] - 1):
        if self.__intersection(coord,
                               np.array((self.__rightmost, coord[1])),
                               self.__coords_augmented[num, :],
                               self.__coords_augmented[num + 1, :]):
            intersection_count += 1
    if intersection_count % 2 == 0:
        return False

```

```
return True
```

```
class Rectangle(Polygon):
    def __init__(self, width, height, coord, point_num):
        x = width/2
        y = height/2
        super().__init__(((x, y),
                           (-x, y),
                           (-x, -y),
                           (x, -y)),
                           point_num,
                           coord
                           )
```

```
import numpy as np
from numpy import pi
from numpy.linalg import norm
from scipy.constants import c
from scipy.special import hankel1, jv
import json
```

```
class _solution:
    """
    Class for containing the solution results and calculating the field at the
    requested coordinates.
```

```
Parameters
```

```
-----
```

```
source_coord : array_like
    (2,) array of the source coordinates.
```

source\_A : complex

Source complex amplitude.

aux\_coord : array\_like

(N, 2) array of the auxiliary source coordinates.

aux\_A : array\_like

(N,) array of the auxiliary source complex amplitudes.

k : float

Wavenumber.

"""

```
def __init__(self, source_coord, source_A, aux_coord, aux_A, k):
```

```
    self.source_coord = np.array(source_coord)
```

```
    self.source_A = source_A
```

```
    self.aux_coord = np.array(aux_coord)
```

```
    self.aux_A = np.array(aux_A)
```

```
    self.k = k
```

```
def __single_field_calc(self, coord):
```

```
    E = 0.0 + 0.0j
```

```
    for aux_coord, aux_A in zip(self.aux_coord, self.aux_A):
```

```
        r = norm(aux_coord - coord)
```

```
        E += aux_A*_reg_hankel(self.k*r)
```

```
    r = norm(self.source_coord - coord)
```

```
    E += self.source_A*hankel1(0, self.k*r)
```

```
    return E
```

```
def field(self, *coords):
```

```
    """
```

```
    Calculate the field at requested coordinates.
```

```
    Parameters
```

-----

coords : array\_like

An (N, 2) array of coordinate pairs. Or two (M, N) array\_like with first denoting the x coordinates and second denoting the y.

Returns

-----

E : ndarray

(N,) or (M, N) array of complex amplitude values.

"""

if len(coords) == 1:

    coords = np.array(coords[0])

    if len(coords.shape) == 1:

        E = self.\_\_single\_field\_calc()

    else:

        E = np.full(coords.shape[0], np.nan, dtype = np.complex128)

        for n\_coord, coord in enumerate(coords):

            E[n\_coord] = self.\_\_single\_field\_calc(coord)

    return E

if len(coords) == 2:

    X = np.array(coords[0])

    Y = np.array(coords[1])

    if X.shape != Y.shape:

        raise ValueError("Incompatible coordinate array shapes!")

    E = np.full\_like(X, np.nan, dtype = np.complex128)

    for m in range(X.shape[0]):

        for n in range(X.shape[1]):

            E[m, n] = self.\_\_single\_field\_calc((X[m, n], Y[m, n]))

    return E



```
def save(self, path):
    """
    Save the current solution to a json file.

    Parameters
    -----
    path : str
        Path to the savefile.
    """
    ...
```

```
def load_solution(path):
    """
    Loads a solution object form a json file.

    Parameters
    -----
    path : str
        Path to the savefile.

    Returns
    -----
    solution : _solution
        A orresponding _solution object.
    """
    ...
```

```
def _reg_hankel(phase):
    """
    Reguralized Hankel function calculation.
```



## Parameters

-----

source\_coord : (2,) array\_like

Tuple of the x and y coordinates of the source.

source\_A : float

Amplitude of the source.

aux\_source\_arr : (N, 2) array\_like

An array\_like containing the x and y coordinates of the sources.

k : float

Wavenumber.

## Returns

-----

A : ndarray

System matrix.

b : ndarray

Inhomogeneous part.

"""

source\_coord = np.array(source\_coord)

aux\_source\_arr = np.array(aux\_source\_arr)

A = np.zeros((aux\_source\_arr.shape[0,])\*2, dtype = np.complex128)

b = np.zeros(aux\_source\_arr.shape[0], dtype = np.complex128)

for num\_cur, aux\_source\_cur in enumerate(aux\_source\_arr):

r = norm(aux\_source\_cur - source\_coord)

b[num\_cur] = -source\_A\*hankel1(0, k\*r)

for num\_sweep, aux\_source in enumerate(aux\_source\_arr):

r = norm(aux\_source\_cur - aux\_source)

A[num\_cur, num\_sweep] = \_reg\_hankel(k\*r)

return A, b

```

def _trim_close_points(coords, thr):
    coords_res = np.array(coords)
    for n_coord, coord in enumerate(coords):
        for ref_coord in coords[n_coord + 1:, :]:
            if norm(coord - ref_coord) < thr:
                coords_res[n_coord, :] = (np.nan, np.nan)
                break
    coords_res = coords_res[~np.isnan(coords_res)].reshape((-1, 2))
    return coords_res

def calculate(source_coord, source_A, shapes, f, min_dist_modifier = 10):
    """
    Main solver of the method.

    Parameters
    -----
    source_pos : tuple
        Tuple of the x and y coordinates of the source.
    source_A : float
        Amplitude of the source.
    shapes : array_like of Shape_like
        Array of the shapes present in the simulation area.
    f : float
        Frequency of the source in Hz.

    Returns
    -----
    res : _solution
        Solution container.

```

```

"""
first = True
for shape in shapes:
    if first:
        aux_coord = shape.source_coords
        first = False
        continue
    aux_coord = np.append(aux_coord,
                          shape.source_coords,
                          axis = 0
                          )
max_density = np.max([shape.point_density for shape in shapes])
min_allowed_dist = 1/(max_density*min_dist_modifier)
aux_coord = _trim_close_points(aux_coord, min_allowed_dist)
k = 2*pi*f/c
A, b = _get_system(source_coord, source_A, aux_coord, k)
aux_A = np.linalg.solve(A, b)
res = _solution(source_coord, source_A, aux_coord, aux_A, k)
return res

```

## Додаток В

## ПРОГРАМА ДЛЯ ГЕНЕРАЦІЇ ІМПУЛЬСНОГО ШУМУ

```
from numpy.random import default_rng
```

```
def __impulse_position(p, size, rng):
```

```
    s = rng.uniform(0, 1, size)
```

```
    for n, val in enumerate(s):
```

```
        if val > 1 - 0.5*p:
```

```
            s[n] = 1
```

```
        elif 1 - p < val < 1 - 0.5*p:
```

```
            s[n] = -1
```

```
        else:
```

```
            s[n] = 0
```

```
    return s
```

```
def impulse_gauss(mean, std, p, size, seed = None):
```

```
    """
```

Generates an impulse noise sequence with Gaussian height distribution.

Parameters

-----

mean : float

Mean amplitude of the impulses.

std : float

Standard deviation of the impulse amplitude.

p : float

Pointwise probability of the impulse occurrence.

N : int

Number of points to generate.

seed : int, optional

Seed of the random number renerator.

"""

rng = default\_rng(seed)

s = \_\_impulse\_position(p, size, rng)

s \*= rng.normal(mean, std, size)

return s

## Додаток Г

## ПРОГРАМА ДЛЯ СОРТУВАННЯ ПАРАМЕТРІВ СИГНАЛУ

```

def __param_sorter(params, template):
    """
    Automatically sorts the resulting estimation values in accordance with
    the template values.

    Parameters
    -----
    params : array_like
        Array of the parameters to sort.
    template : array_like
        Parameters to use as a template.

    Returns
    -----
    I : ndarray
        Array of the indexes which sort the input parameters.
    """
    params = np.array(params)
    template = np.array(template)
    if params.size != template.size:
        raise ValueError("len(params) != len(template)")
    diff_mtx = np.zeros((params.size, template.size))
    for n, param in enumerate(params):
        for m, val in enumerate(template):
            diff_mtx[n, m] = np.abs(param - val)
    I = -np.ones(params.size, dtype = np.int64)
    for _ in range(params.size):

```



```
pos = np.unravel_index(np.nanargmin(diff_mtx), diff_mtx.shape)
I[pos[1]] = pos[0]
diff_mtx[pos[0], :] = np.nan
diff_mtx[:, pos[1]] = np.nan
if -1 in I:
    raise ValueError("Incomplete result returned!")
return I
```

## Додаток Д

ПРОГРАМА ДЛЯ СИМУЛЯЦІЇ ВИМІРЮВАЛЬНОЇ УСТАНОВКИ

```
.SUBCKT PIC16F882_ADC IN OUT SWITCH_C_IN SWITCH_C_OUT
```

```
.MODEL internal_diode D
```

```
.MODEL sampling_switch SW(VT=2.5 VH=0 RON=7k)
```

```
CPIN IN 0 5p
```

```
V1 VDD 0 5
```

```
D1 IN VDD internal_diode
```

```
D2 0 IN internal_diode
```

```
RLEAKAGE IN 0 10MEG
```

```
RIC IN SWITCH 1k
```

```
S1 SWITCH OUT SWITCH_C_IN SWITCH_C_OUT sampling_switch
```

```
CHOLD OUT 0 10p
```

```
.ENDS
```

```
"""
```

Set of utilities for automated test signal generation. Simple waveguide model.

Capable of calculating for several distances in parallel.

```
"""
```

```
import numpy as np
```

```
from numpy import pi
```

```
from scipy.constants import c
```

```
import subprocess
```

```
import csv
```

```
from tempfile import TemporaryDirectory
```

```
from multiprocessing import Pool, cpu_count
```

```
from os import mkdir
```

```
from os.path import isdir
```

```

def stack_generator(n_diode, n_phase, tempdir_path):
    stack = f"""Measuring line diode detector

    .model                                                    input_source
    filesource(file="{tempdir_path}\\input_signal_{n_diode}_{n_phase}.csv")
    amploffset=[0] amplscale=[1])
    .options interp
    .include PIC16F882_ADC.cir
    .include spice_params.inc
    .include D324_v7.mod
    .ic v(switch_in)=0

    AVIN [IN] input_source
    X1 IN switch_in D324
    R1 switch_in 0 51
    C1 switch_in 0 1n

    X2 switch_in ADC_out V_cont 0 PIC16F882_ADC

    .control
    run
    wrdata {tempdir_path}\\vout_{n_diode}_{n_phase}.csv V(ADC_out)
    .endc
    .end"""

    with open(f"{tempdir_path}\\detector_{n_diode}_{n_phase}.cir", "w") as
file:
        file.write(stack)

def single_diode_field_calc(E0, R, a, f, dl, n):
    """

```

Calculates the complex electric field at a set of diodes in the measuring line.

#### Parameters

-----

E0 : complex

Incident electric field complex amplitude.

R0 : complex

Complex reflection coefficient of the reflector at the front diode.

a : float

Waveguide width in m.

f : float or ndarray

Frequency in Hz.

dl : float

Distance between the diodes in m.

n : int

Diode number (starting with 0 for the front one).

#### Returns

-----

E : (len(f),) ndarray

Complex amplitudes of the electric field with a single diode.

"""

```
prop_const = np.sqrt((2*pi*f/c)**2 - (pi/a)**2)
```

```
l = dl*n
```

```
E = E0*(np.exp(1j*prop_const*l) + R*np.exp(-1j*prop_const*l))
```

```
return E
```

```
def segmented_complex_chirp(f_min, f_max, dt, T, N_segment, t_pre, t_post):
```

```
"""
```

Calculates a time-dependant complex constant amplitude chirp.

#### Parameters

-----

E0 : complex

Incident electric field complex amplitude.

f\_min : float

Minimum frequency in Hz.

f\_max : float

Maximum frequency in Hz.

dt : float

Discretization step of the sampling process in s.

T : float

Frequency ramp-up time.

N\_segment : int

Number of segments to generate.

t\_pre : float

Time before the requested points.

t\_post :

Time after the the requested points.

#### Returns

-----

E : (N,) ndarray

Resulting field vavlues.

t\_arr : (N,) ndarray

Resulting time vavlues.

"""

f\_slope = (f\_max - f\_min)/T

t\_segment\_arr, segment\_step = np.linspace(t\_pre, T - t\_post, N\_segment,

```

        retstep = True)

    if t_pre + t_post > segment_step:
        raise ValueError("Overlapping segments! Decrease the segment count or"
            " increase the segment step.")

    E = np.array([], dtype = np.float64)
    f_arr = np.array([], dtype = np.float64)
    f_segment_arr = f_min + f_slope*t_segment_arr
    for t_segment in t_segment_arr:
        t_start = t_segment - t_pre
        t_stop = t_segment + t_post
        t_arr = np.arange(t_start, t_stop, dt)
        f_arr = np.append(f_arr, f_min + f_slope*t_arr)
        E_arr = np.exp(2j*pi*(f_min*t_arr + 0.5*f_slope*t_arr**2))
        E = np.append(E, E_arr)
    t = np.arange(E.size)*dt
    return E, t, f_arr, f_segment_arr

def ADC_digitizer(vals, V_ref, bit_num):
    res_V = []
    res_I = []
    val_num = 2**bit_num
    V_vals = np.linspace(0, V_ref, val_num)
    for val in vals:
        I = np.argmin(np.abs(V_vals - val))
        res_V.append(V_vals[I])
        res_I.append(I)
    return res_V, res_I

def single_diode(E0, s_chirp, f_arr, t, N_segment, f_segment_arr, a, R,
    V_ref, bit_num, dl_diode, n_diode, n_phase,

```

```

        tempdir_path, prefix):
# Input data file creation
s = np.real(
    s_chirp*single_diode_field_calc(E0, R, a, f_arr, dl_diode, n_diode)
)
with open(f'{tempdir_path}\\input_signal_{n_diode}_{n_phase}.csv', "w",
newline = "") as file:
    writer = csv.writer(file, delimiter = " ")
    writer.writerows(zip(t, s))
stack_generator(n_diode, n_phase, tempdir_path)
    result = subprocess.run(fr".\Spice64\bin\ngspice_con -b
{tempdir_path}\\detector_{n_diode}_{n_phase}.cir")
    if result.returncode != 0:
        raise RuntimeError("SPICE has crashed with the error code "
            f'{result.returncode}')
    with open(f'{tempdir_path}\\vout_{n_diode}_{n_phase}.csv', "r", newline
= "") as file:
        reader = csv.reader(file, delimiter = " ",
            quoting = csv.QUOTE_NONNUMERIC)
        t_res = []
        s_res = []
        next(reader)
        for _ in range(N_segment):
            row = next(reader)
            t_res.append(row[1])
            if row[2] != "":
                s_res.append(row[2])
            else:
                s_res.append(row[3])
s_res, I_res = ADC_digitizer(s_res, V_ref, bit_num)

```

```

with open(prefix + f"Single diode
files\\ADCoout_D{n_diode}_P{n_phase}.csv", "w", newline = "") as file:
    writer = csv.writer(file, delimiter = ",")
    writer.writerows(zip(t_res, f_segment_arr, s_res, I_res))
return s_res, I_res

def main(E0, f_min, f_max, fd, T, N_segment, t_pre, t_post,
        a, N_phase, R0, dl_diode, N_diode, V_ref, bit_num, prefix = None):
    if prefix is not None:
        if not isdir(prefix):
            mkdir(prefix)
            prefix = prefix + "\\"
    else:
        prefix = ".\\"
    if not isdir(prefix + "Single diode files"):
        mkdir(prefix + "Single diode files")
    fd *= 1e9
    f_max *= 1e9
    f_min *= 1e9
    dt = 1/fd
    s_chirp, t, f_arr, f_segment_arr = segmented_complex_chirp(
        f_min, f_max, dt, T, N_segment, t_pre, t_post)
    # Simulation parameter file creation
    with open("spice_params.inc", "w") as file:
        file.write(f".tran {t_pre + t_post:e} {t[-1]:e} 0 {dt/10:e}\n"
            f"VCONTROL V_cont 0 PULSE(0 5 {t_pre:e} {dt:e} {dt:e} "
            f"{t_post:e} {t_pre + t_post:e})")
    phase_arr = np.linspace(0, pi, N_phase)
    R_arr = R0*np.exp(1j*phase_arr)
    phase_arr = np.angle(R_arr)

```



with open(prefix + "Single diode files\\Reflector phases.csv", "w", newline = "") as file:

```

    writer = csv.writer(file)
    writer.writerows(enumerate(phase_arr))
N_cpu = cpu_count()
n_total = 0
N_total = R_arr.size*N_diode
res_arr = [[] for n_diode in range(N_diode)]
while n_total < N_total:
    args = []
    with TemporaryDirectory(dir = ".\\") as tempdir:
        for _ in range(N_cpu):
            n_diode = n_total % N_diode
            n_phase = n_total // N_diode
            args.append((E0, s_chirp, f_arr, t, N_segment, f_segment_arr,
                        a, R_arr[n_phase], V_ref, bit_num,
                        dl_diode, n_diode, n_phase, tempdir, prefix))
            n_total += 1
        if n_total >= N_total:
            break
    with Pool(N_cpu) as pool:
        res_arr[n_diode].append(pool.starmap(single_diode, args))
with open(prefix + "Frequency indexing.csv", "w", newline = "") as file:
    writer = csv.writer(file, quoting = csv.QUOTE_NONNUMERIC)
    writer.writerow(["Index", "Frequency"])
    writer.writerows(enumerate(f_segment_arr))
header = ["Phase",]
for n in range(N_diode):
    header += [f"V {n}", f"Register {n}"]
for n_frq in range(f_segment_arr.size):

```

```

with open(prefix + f"Total_output_{n_freq}.csv", "w", newline = "") as
total_file:

    writer = csv.writer(total_file, quoting = csv.QUOTE_NONNUMERIC)
    writer.writerow(header)
    for n_phase in range(N_phase):
        row = [phase_arr[n_phase],]
        for n_diode in range(N_diode):
            with open(prefix +
                f"Single diode files\\ADCut_D{n_diode}_P{n_phase}.csv",
newline = "") as single_file:

                single_reader = csv.reader(single_file, quoting =
csv.QUOTE_NONNUMERIC)

                for _ in range(n_freq + 1):
                    _, _, U, reg = next(single_reader)
                    row += [U, reg]
            writer.writerow(row)

if __name__ == "__main__":
    f_max_ref = 52
    a_wg = 5.2e-3
    for R0_cur in np.arange(0.0, -0.05, -0.05):
        main(
            E0 = 1,
            f_min = 38,
            f_max = f_max_ref,
            fd = 150,
            T = 0.008,
            N_segment = 10,
            t_pre = 200e-9,

```

```

t_post = 100e-9,
a = a_wg,
N_phase = 10,
R0 = R0_cur,
dl_diode = 1/np.sqrt((f_max_ref*1e9/c)**2 - 1/(2*a_wg)**2)/10,
N_diode = 6,
V_ref = 5,
bit_num = 10,
prefix = f'\\.R {R0_cur}'
)

```

## Додаток Е

Програма методу пропускання точок для методу Проні

```
def prony_missing_rows(s, M, dt, t0, show_graphs = False):
    """
    The Prony's method algorithm with the ability of skipping the missing points
    in data

    Properties
    -----
    s : array_like
        Input signal the missing point should be substituted with numpy.nan
    M : int
        Model order
    dt : float
        Time step
    t0 : float
        Initial time

    Returns
    -----
    f : ndarray
        Frequency estimation
    A : ndarray
        Amplitude estimation
    s_res : ndarray
        Recovered signal
    """
    #Main part with 0 instead of None
    s0 = np.array(s)
```

```

#System matrix assembly
S_mtx = lin.hankel(s0[:s0.size - M], s0[s0.size - M - 1:])
S_mtx = S_mtx[np.all(~np.isnan(S_mtx), axis = 1), :]

#System solution (pseudoinverse)
eig_val, eig_vect = lin.eig(S_mtx.T.conj() @ S_mtx)
c = eig_vect[:, eig_val.real.argmin()][::-1]

#Frequency estimation
z = np.roots(c)
f = np.log(z + 0j)/(2j*pi*dt)

#Amplitude estimation
s_trunc = np.array(s)
s_trunc = s_trunc[np.invert(np.isnan(s))]
Z_mtx = np.vander(z, N = s.size, increasing = True).T
Z_mtx_trunc = Z_mtx[np.invert(np.isnan(s)), :]
A_shift = lin.pinv(Z_mtx_trunc) @ s_trunc
A = A_shift*np.exp(-2j*pi*f*t0)

#Signal reconstruction
s_res = Z_mtx @ A_shift

#Graph output
if show_graphs:
    plt.figure(figsize = (5, 5))
    plt.title("Extended signal matrix")
    plt.imshow(S_mtx, interpolation = "none", extent = (0.5, S_mtx.shape[1] +
0.5, S_mtx.shape[0] + 0.5, 0.5))

```

```

plt.xlabel("Columns", size = 14)
plt.ylabel("Rows", size = 14)
plt.colorbar()

return f, A, s_res

def mdp_calc(err, noise_p, beta):
    """
    Minimum duration principle norm calculation

    Parameters
    -----
    err : array_like
        Error vector
    noise_p : float
        White noise mean power
    beta : float
        Norm parameter

    Returns
    -----
    res : float
        Norm value
    """
    res = np.sum((np.abs(err)**2 + noise_p)**beta) - noise_p**beta
    return res

def compare_segment(s, s_test, normalize):
    """

```

Performs a scalar multiplication of the test signal with the signal segments at each point and  
 outputs its absolute value.

#### Parameters

-----

`s : ndarray`

Signal to analyze.

`s_test : ndarray`

Test signal.

`normalize : bool`

Choose if the test signal and the segments are normalized.

"""

```
s_test_mean = s_test - np.mean(s_test)
```

```
s_pad = np.append(np.full(s_test.size//2, s[0]), s)
```

```
s_pad = np.append(s_pad, np.full(s_test.size - s_test.size//2 - 1, s[s.size - 1]))
```

```
if normalize:
```

```
    test_norm = lin.norm(s_test_mean)
```

```
res = []
```

```
for m in range(0, s_pad.size - s_test.size + 1):
```

```
    segment = np.array(s_pad[m:m + s_test.size])
```

```
    segment -= np.mean(segment)
```

```
    prod = segment @ s_test_mean
```

```
    if normalize:
```

```
        prod /= lin.norm(segment)*test_norm
```

```
    res.append(np.abs(prod))
```

```
res = np.array(res)
```

```
return res
```

```
def prony_row_skip_mdp(s, M, dt, t0, skip_max, skip_min = 0, beta = 1/16):
```

"""

Removes the points with high derivatives until the Prony's method gives an appropriate approximation

Parameters

-----

s : array\_like

Input signal the missing point should be substituted with `numpy.nan`

M : int

Model order

dt : float

Time step

t0 : float

Initial time

skip\_max : int

Max amount of point pairs to skip

skip\_min : int, optional

Min amount of point pairs to skip (best set to the amount of noise spikes if known)

beta : float, optional

Minimum duration norm parameter

Returns

-----

f : ndarray

Estimated frequency

A : ndarray

Estimated amplitude

s\_res : ndarray



```

    Restored signal
    """

    #Peak detection
    s_test = np.array([0, 1, 0])
    peak_val = compare_segment(s, s_test, normalize = False)
    peak_ord = np.arange(peak_val.size)[peak_val.argsort()[::-1]]

    #Gaussian noise power estimation
    S_mtx = lin.hankel(s[:s.size - M], s[s.size - M - 1:])
    ev = lin.eigvals(S_mtx.T.conj() @ S_mtx)
    gauss_p = np.min(np.abs(ev))/S_mtx.shape[0]
    f = None
    A = None
    s_res = None
    mdp_best = None
    for skip_amount in range(skip_min, skip_max + 1):
        s_cur = np.array(s)
        s_cur[peak_ord[:skip_amount]] = np.nan
        try:
            f_cur, A_cur, s_res_cur = prony_missing_rows(s_cur, M, dt, t0)
            mdp_cur = mdp_calc(s_res_cur - s, gauss_p, beta)
            if mdp_best is None or mdp_cur < mdp_best:
                mdp_best = mdp_cur
                f = f_cur
                A = A_cur
                s_res = s_res_cur
        except:
            warnings.warn(f"Unable to estimate signal for {skip_amount} of pairs
skipped")
    return f, A, s_res

```

## Додаток Ж

## ПРОГРАМА МЕТОДУ ПРОПУСКАННЯ ТОЧОК ДЛЯ МПМ

```
def mpm_point_skipping(s, M, L, dt, t0, imp_pos = None):
```

```
    """
```

```
    Standard MPM method with point skipping.
```

```
    Parameters
```

```
    -----
```

```
    s : array_like
```

```
        Singnal to analyze.
```

```
    M : int
```

```
        Signal order.
```

```
    L : int
```

```
        Method order.
```

```
    dt : float
```

```
        Time step.
```

```
    t0 : float
```

```
        Initial time.
```

```
    imp-pos : array_like
```

```
        Array of the impulse positions.
```

```
    Returns
```

```
    -----
```

```
    f : ndarray
```

```
        Complex frequencies of the signal.
```

```
    A : ndarray
```

```
        Complex amplitudes of the signal.
```

```
    s_res : ndarray
```

```
        Estimated signal shape.
```

```

"""
s = np.array(s)
if imp_pos is not None:
    s[imp_pos] = np.nan
S = lin.hankel(s[:-L+1], s[-L:])
I = np.all(~np.isnan(S), axis = 1)
S = S[I, :]
_, _, V = lin.svd(S)
V = V.T.conj()
V1 = V[1:, :M]
V2 = V[:-1, :M]
z = lin.eigvals(lin.pinv(V2)@V1).conj()
f = np.log(z)/(2j*pi*dt)
I = ~np.isnan(s)
Z_full = np.vander(z, N = s.size, increasing = True).T
Z = Z_full[I, :]
A_shift = lin.pinv(Z)@s[I]
A = A_shift*np.exp(-2j*pi*f*t0)
s_res = Z_full@A_shift
return f, A, s_res

def __min_duration_est(s, noise_std, alpha = 16):
    """
    Calculates the minimum duration estimation for a given signal sequence.

    s : array_like
        Singnal to analyze.
    noise_std : float
        Standard deviation of the white noise present in the signal.
    alpha : float, optional

```

Parameter of the estimator. 16 by default.

```

"""

res = np.sum(
    (np.abs(s)**2 + noise_std**2)**(1/alpha) - noise_std**(2/alpha))
return res

def __imp_finder_matched(s):
    """
    Finds the potential impulse locations based on the matched filter.
    """
    template = np.array((-1/3, 2/3, -1/3))
    res = np.abs(np.convolve(s, template)[1:-1])
    I = argrextrema(res, np.greater)[0]
    I = I[np.argsort(res[I])][::-1]
    # I = np.arange(res.size)[np.argsort(res)[::-1]]
    return I

def __white_std_est(s, M):
    """
    Estimates the standard deviation of the white noise for a signal with a
    known order.
    """
    S = lin.hankel(s[:-M], s[-M - 1:])
    eigvals = lin.eigvals(S.T.conj()@S)
    std = np.sqrt(eigvals.min()/S.shape[0])
    return std

def mpm_point_skipping_auto(s, M, L, dt, t0, max_skip_num = None):
    """
    Standard MPM method with point skipping and automatic impulse detection.

```

## Parameters

-----

`s : array_like`

Signal to analyze.

`M : int`

Signal order.

`L : int`

Method order.

`dt : float`

Time step.

`t0 : float`

Initial time.

`max_skip_num : int, optional`

Maximum number of points to skip. Automatic theoretical maximum if not set.

## Returns

-----

`f : ndarray`

Complex frequencies of the signal.

`A : ndarray`

Complex amplitudes of the signal.

`s_res : ndarray`

Estimated signal shape.

"""

`s = np.array(s)``noise_std = __white_std_est(s, M)``if max_skip_num is None:``max_skip_num = (s.size - L - M) // (L + 1)`

```

imp_pos = __imp_finder_matched(s)
dev_best = None
for n_skip in range(0, max_skip_num + 1):
    f, A, s_res = mpm_point_skipping(s, M, L, dt, t0, imp_pos[:n_skip])
    dev = __min_duration_est(s_res - s, noise_std)
    if dev_best is None or dev < dev_best:
        dev_best = dev
        s_res_best = s_res
        f_best = f
        A_best = A
return f_best, A_best, s_res_best

def __imp_finder_diff(s):
    res = np.abs(np.diff(s))
    I = argrelextrema(res, np.greater)[0]
    I = I[np.argsort(res[I])][::-1]
    return I

def mpm_point_skipping_auto_diff(s, M, L, dt, t0, max_skip_num = None):
    """
    Standard MPM method with point skipping and automatic impulse detection.

    Parameters
    -----
    s : array_like
        Singnal to analyze.
    M : int
        Signal order.
    L : int
        Method order.

```

dt : float

Time step.

t0 : float

Initial time.

max\_skip\_num : int, optional

Maximum number of points to skip. Automatic theoretical maximum if not set.

Returns

-----

f : ndarray

Complex frequencies of the signal.

A : ndarray

Complex amplitudes of the signal.

s\_res : ndarray

Estimated signal shape.

"""

```
s = np.array(s)
```

```
noise_std = __white_std_est(s, M)
```

```
if max_skip_num is None:
```

```
    max_skip_num = (s.size - L - M) // (L + 1)
```

```
imp_pos = __imp_finder_diff(s)
```

```
dev_best = None
```

```
for n_skip in range(0, max_skip_num + 1):
```

```
    f, A, s_res = mpm_point_skipping(s, M, L, dt, t0, imp_pos[:n_skip])
```

```
    dev = __min_duration_est(s_res - s, noise_std)
```

```
    if dev_best is None or dev < dev_best:
```

```
        dev_best = dev
```

```
        s_res_best = s_res
```

```
        f_best = f
```

```
A_best = A  
return f_best, A_best, s_res_best
```



## Додаток И

## ПРОГРАМА АЛГОРИТМУ КОРИГУВАННЯ ЧАСТОТ

```
def prony_eig_correction(s, M, dt, t0):
    """
    Eigenvalue-based Prony's method realisation with frequency correction.

    Parameters
    -----
    s : array_like
        Input signal array.
    M : int
        Signal model order.
    dt : float
        Time step of the signal.
    t0 : float
        Starting time value.

    Returns
    -----
    f : ndarray
        Array of the complex frequency values.
    A : ndarray
        Array of the complex amplitude values.
    s_res : ndarray
        Estimated signal array.
    """
    S = lin.hankel(s[:-M], s[-M - 1:])
    R = S.T.conj() @ S
    eig_vals, eig_vect = lin.eig(R)
```

```

c = eig_vect[:, np.argmin(eig_vals)][::-1]
z = np.roots(c)
f = np.log(z + 0j)/(2j*pi*dt)
Z_left = np.vander(z, N = s.size, increasing = True).T
Z_right = np.diag(1j*dt*np.arange(0, Z_left.shape[0]))@Z_left
Z = np.append(Z_left, Z_right, axis = 1)
lin_res = lin.pinv(Z)@s
A_shift = lin_res[:M]
w_corr = lin_res[M:]/A_shift
f += w_corr/(2*pi)
A = A_shift[:M]*np.exp(-2j*pi*f*t0)
s_res = Z@lin_res
return f, A, s_res

```

```
def mpm_correction(s, M, L, dt, t0):
```

```
    """
```

```
    MPM method with the frequency correction technique.
```

```
    Parameters
```

```
    -----
```

```
    s : array_like
```

```
        Singnal to analyze.
```

```
    M : int
```

```
        Signal order.
```

```
    L : int
```

```
        Method order.
```

```
    dt : float
```

```
        Time step.
```

```
    t0 : float
```

```
        Initial time.
```

Returns

-----

`f` : ndarray

Complex frequencies of the signal.

`A` : ndarray

Complex amplitudes of the signal.

`s_res` : ndarray

Estimated signal shape.

"""

```
S = lin.hankel(s[:-L+1], s[-L:])
```

```
_, _, V = lin.svd(S)
```

```
V = V.T.conj()
```

```
V1 = V[1:, :M]
```

```
V2 = V[:-1, :M]
```

```
z = lin.eigvals(lin.pinv(V2)@V1).conj()
```

```
f = np.log(z)/(2j*pi*dt)
```

```
Z_left = np.vander(z, N = s.size, increasing = True).T
```

```
Z_right = np.diag(1j*dt*np.arange(0, Z_left.shape[0]))@Z_left
```

```
Z = np.append(Z_left, Z_right, axis = 1)
```

```
lin_res = lin.pinv(Z)@s
```

```
A_shift = lin_res[:M]
```

```
w_corr = lin_res[M:]/A_shift
```

```
f += w_corr/(2*pi)
```

```
A = A_shift[:M]*np.exp(-2j*pi*f*t0)
```

```
s_res = Z@lin_res
```

```
return f, A, s_res
```